2) $W[U_1 U_2] = W[U_1] + W[U_2]$ $\leftarrow \pi_3(S^3)$ è isomorfo a $(\mathbb{Z},+)$ come gruppo.

$$W[U] = -\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3_x} tr\left[(U^{-1}dU)^3\right]$$

$$(U_1U_2)^{-1}d(U_1U_2) = U_2^{-1}(U_1^{-1}dU_1)U_2 + U_2^{-1}\cancel{U_1^{-1}}\cancel{U_1}\, dU_2$$

$$\equiv U_2^{-1}(A+B)U_2 \qquad \left.\begin{array}{l} A \equiv U_1^{-1}dU_1 \\ B \equiv dU_2\, U_2^{-1} \end{array}\right\} \text{1-forme}$$

$$W[U_1U_2] = -\frac{1}{24\pi^2}\int Tr\left[(A+B)(A+B)(A+B)\right] =$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2}\int\left(Tr\, A^3 + Tr\, B^3 + 3Tr(A^2B) + 3Tr(AB^2)\right)$$

$$= W[U_1] + W[U_2] - \frac{1}{8\pi^2}\int Tr(-dAB + AdB)$$

$$A^2 = -dA \leftarrow dA = d(U_1^{-1}dU_1) = dU_1^{-1}dU_1 = -U_1^{-1}dU_1U_1^{-1}dU_1$$

$$d(U_1^{-1}U_1) = 0 = dU_1^{-1}U_1 + U_1^{-1}dU_1 \Rightarrow dU_1^{-1} = -U_1^{-1}dU_1U_1^{-1}$$

$$B^2 = dB$$

$$= W[U_1] + W[U_2] + \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3_x} d\,Tr(AB)$$

$\parallel$ perché S^3_x non ha bordo

0

//

- Consideriamo $U_0(x) = \mathbb{1}$ e $U_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + i\frac{2x_i}{x^2+1}\sigma^i$

$U_0 \to W=0$, $U_1 \to W=1$

vedi param. S^3 con y_μ

$\Rightarrow U_1$ non può essere deformato in maniera continua a U_0

Con la mappa U_1 possiamo trovare rappresentanti per tutte le altre classi: $W[U_1\cdot U_1] = 2$ $\quad W[U_1^+] = -1$

$(0 = W[U_1^+U_1] = W[U_1^+] + W[U_1])$

• Ω_* è l'UNIONE DISGIUNTA di componenti disconnesse labellate dal winding number $w \in \mathbb{Z}$:

$$\Omega_* = \bigcup_{w=-\infty}^{+\infty} [w] \qquad\qquad \pi^0(\Omega_*) = \mathbb{Z}$$

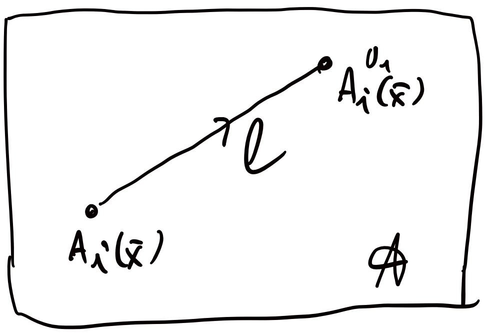
↑ mappe nella classe labellata da w.

$\boxed{Q = \mathcal{A}/\Omega_*}$

Consideriamo una linea in $\mathcal{A}$ data da

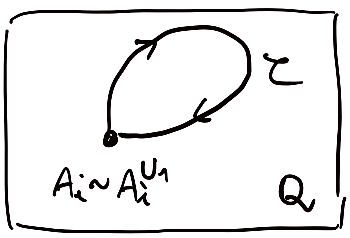
$$A_i(\bar x,\tau) = A_i(\bar x)(1-\tau) + A_i^{U_1}(\bar x)\tau \qquad \tau \in [0,1] \qquad (*)$$

(U_1 è la mappa con $w=1$)



Nel quoziente, la linea l in $\mathcal{A}$ diventa un loop, perché

$$A_i(\bar x) \sim A_i^{U_1}(\bar x)$$



$\tilde A(\tau) = A_{(0)}^{U(\tau)}$ $\qquad U:[0,1]\to\Omega_*$ t.c. $U(0)=\mathbb{1}$, $U(1)=U_1$

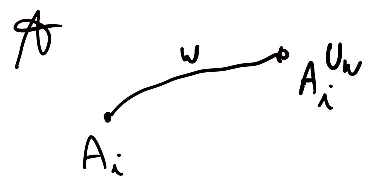
qto vuol dire c'è omotopia tra $\mathbb{1}$ e U_1

$\mathcal{C}$ è CONTRAIBILE in Q ?

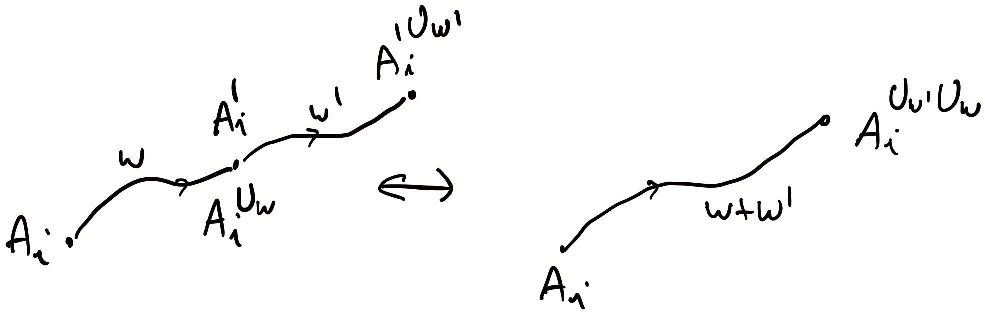
Lo sarebbe se l fosse deformabile a un pezzo di orbita. Ma questo sarebbe possibile solo se $U_1(x)$ fosse deformabile in maniera continua alla mappa $\mathbb{1}$. Questo non è possibile perché U_1 e $\mathbb{1}$ appartengono a due classi di omotopia distinte

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{C}$ NON CONTRAIBILE $\Rightarrow$ $\pi^1(Q) \neq 0$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento sostituendo U_1 con U_w con $w \neq 0$ generico



Questi cammini sono labellati da $w \in \mathbb{Z}$ e cammini con w diverso non possono essere deformati l'uno nell'altro.

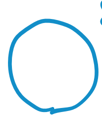


Abbiamo isomorfismo di gruppo con $\mathbb{Z}$:

$$\pi^1(Q) \cong \mathbb{Z}$$

[Finora $G = SU(2) \cong S^3$. Per un generico gruppo di Lie, esso ha un sottogruppo $SU(2)$ $\Rightarrow$ anche le mappe da S^3_x a G sono classificate da $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$.

Es. con π_1: $S^1 \rightarrow$



S^1 pendolo

AB effect]

INTEGRALE DI CAMMINO e θ - TERMINE

Q è uno sp. topologicam. non-triviale $\quad (\pi^1(Q) = \mathbb{Z})$

$$\int \underset{\uparrow}{\mathcal{D}A}\, e^{iS[A]} = \sum_w \underset{\uparrow}{\chi(w)} \int \mathcal{D}_w A\, e^{iS[A]} \qquad (*)$$

$\{$cammini in $Q = \mathcal{A}/\mathcal{G}_\infty\}$

CARATTERE di $\pi^1(Q) = \mathbb{Z} \Rightarrow \chi(w) = e^{iw\theta}$

I campi $A(\bar{x}, t)$ possono essere visti sia come funz. da $\mathbb{R}^4$, oppure come cammini (parametrizzati da t) in Q.

$\Rightarrow$ diverse teorie quantistiche associate alla stessa teoria classica, che sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

- w che compare in $\chi(w)$ è il WINDING NUMBER
- $(*)$ può essere riscritta come $\int \mathcal{D}A\, e^{iS + iS_T}$.

  In questo caso il termine topologico è

$$S_T = \frac{\theta}{64\pi^2} \int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma} = \theta\, c_2$$

  che già sappiamo essere l'integrale di una derivata totale.

- $\int \mathcal{D}_w A\, e^{-S_E(A)}$ è approssimata semiclassicamente da una soluz. delle eq. del moto Euclidee, cioè da ISTANTONI.

[Nota: $d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sim dx^0 d^3x\, \epsilon^{0ijk} F_{0i} F_{jk} = d^4x_E\, F_{4i} F_{jk} \epsilon^{ijk} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{iS + iS_T} \rightsquigarrow e^{-S_E + iS_T}$]

- $$e^{iS_T[A_w]} = \chi(w) = e^{iw\theta}$$

$$w = -\frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left[(U^{-1}dU)^3\right] = \int d^3\bar{x}\,\left(K^0(\overset{U}{A}(\bar{x})) - K^0(A(\bar{x}))\right) =$$

$$= \int d^4x \;\partial_\mu K^\mu(A(x)) = -\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta})$$

(Nair pag. 365)

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)$$

- Esempio di loop non contraibile

$$A_i(\bar{x}, x_4) = A_i(\bar{x})\frac{1}{1+e^{x_4}} + \frac{e^{x_4}}{1+e^{x_4}}A_i^{U_1}(\bar{x})$$

$\rightarrow A_i \quad x_4 \rightarrow -\infty$

$\rightarrow A_i^{U_1} \quad x_4 \rightarrow +\infty$

$w = 1$ per costruzione

Il contributo di tale cammino al P.I è dato da

$$e^{-S[A_i] + i\theta}$$

C'è un'infinità di cammini con $w = 1$ e tutti contribuiscono a $e^{i\theta}\int DA_{w=1}\, e^{-S_E[A]}$.

Il contributo dominante è dato dai cammini che minimizzano l'azione Euclidea. Tali cammini avranno le seguenti proprietà:

1) sol. delle eq. del moto Euclidee. ($\delta S_E = 0$)
2) $S_E[A_{sol}] < \infty$

3) avranno un winding number fissato.

4) $A_i(\bar{x}, x_4) \to 0$ per $x_4 \to -\infty$ e $A_i(\bar{x}, x_4) \to i U_w^{-1} \partial_i U_w$ per $x_4 \to +\infty$

(scelgo come pto base per i loop $A_i = 0$)$^{(*)}$

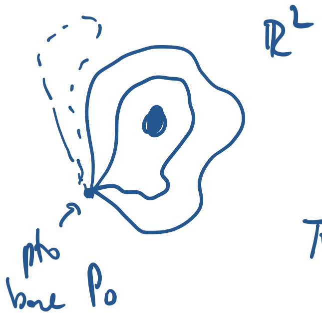
5) $A_0 \equiv A_4 = 0$ (nostra scelta di gauge fissata)

1,2,3

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad w(A) = n \in \mathbb{Z} \quad , \quad S_E(A) < \infty$$

Le config. che soddisfano queste prop. sono dette ISTANTONI !

(*)



$$\pi^1_{P_0}(Q) \cong \pi^1_{P_0'}(Q) \equiv \pi^1(Q)$$