LOGICA

Lezione 5 : Sistemi Deduttivi (per Logica Proposizionale)

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della lezione

- Sistemi deduttivi
  - Introduzione
  - Proprietà
- Deduzione naturale
  - Regole di inferenza
- Sistemi assiomatici (cenni)
- Calcolo dei sequenti
  - Assiomi e regole di inferenza

Dimostrazioni ($\Rightarrow$)

- $(A \to B)$ e $(A \to (B \to C)) \Rightarrow A \to C$

- sse $((A \to B) \wedge (A \to (B \to C))) \to (A \to C)$ è una tautologia

- Possiamo dimostrare che è una tautologia costruendo la tabella di verità

- Oppure possiamo darne una dimostrazione diretta

Dimostrazioni

- Possiamo anche darne una dimostrazione diretta
- Ipotesi:
  1. $(A \rightarrow B)$
  2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- Tesi:
  - $A \rightarrow C$ (se vale A deve valere anche C)
- Dimostrazione:
  - Se A non vale hp e tesi sono entrambe vere
  - Se vale A da 1)$(A \rightarrow B)$ ho che vale anche $\boldsymbol{B}$
  - Se vale A da 2)($A \rightarrow (B \rightarrow C)$): ho che vale anche $(\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C})$
  - Quindi se vale A, ho che B e $(B \rightarrow C)$ valgono e quindi vale anche $\boldsymbol{C}$

Sistemi deduttivi

- **Scopo:**
  - definire dei sistemi di calcolo (*sistemi deduttivi*) per lo sviluppo di dimostrazioni.

- **Dimostrazione in un sistema deduttivo**:
  - è una sequenza di passi elementari che partendo dalle *premesse* consenta di ottenere la *conclusione*.

Proprietà dei sistemi deduttivi

- **Correttezza:** il sistema deduttivo non inferisce proposizioni non valide
- **Completezza:** ogni formula valida è dimostrabile con il sistema deduttivo.
- Un sistema deduttivo è *corretto* e *completo* se inferisce tutte e sole le proposizioni valide.

Notazione

$$P_1, \dots, P_n \vdash Q$$

- Nel sistema di calcolo siamo in grado di fornire una dimostrazione della formula Q partendo da $P_1, \dots, P_n$
- $P_1, \dots, P_n$ sono le **premesse**
- Q è la **conclusione**

- Possiamo usare anche $\Gamma \vdash Q$ e Γ può essere vuoto

Regole Elementari e Condizionali

- **Regole Elementari** $A,\ A \to B \vdash B$

- **Regole Condizionali**: che dipendono da alcune ipotesi di deducibilità
  - Esempio: se $A \vdash C \quad e \quad B \vdash C$ allora $A \vee B \vdash C$

  - A, B sono *premesse sussidiarie*
  - C è una *conclusione sussidiaria*

Regole dei Connettivi

- Per i connettivi ho due tipi di regole:
  - Regole di *eliminazione* del connettivo ("dicono cosa si può concludere")
  - Regole di *introduzione* del connettivo ("esprimono le condizione necessarie per concludere")

- **Congiunzione**:
  - $(\wedge e.1)$ $A \wedge B \vdash A$
  - $(\wedge e.2)$ $A \wedge B \vdash B$
  - $(\wedge i)$ $A, B \vdash A \wedge B$

Regole dei Connettivi

- **Disgiunzione**:
  - $(\vee\, e)$ $\quad se\ A \vdash C\ e\ B \vdash C\ allora\ A \vee B \vdash C$
  - $(\vee\, i.1)$ $\quad A \vdash A \vee B$
  - $(\vee\, i.2)$ $\quad B \vdash A \vee B$

- **Implicazione**:
  - $(\rightarrow e)\ A, A \rightarrow B \vdash B$ (*Modus Ponens*)
  - $(\rightarrow i)\ se\ A \vdash B\ allora\ \vdash A \rightarrow B$

Regole dei Connettivi

- **Falsità:**
  - $(\bot\, e)\quad \bot \vdash A$

- **Negazione**:
  - $(\neg e)\quad A, \neg A \vdash \bot$
  - $(\neg i)\quad se\ A \vdash \bot\ \ allora\ \ \vdash \neg A$
  - *(terzium non datur)* $\ se\ \neg A \vdash B\ e\ A \vdash B\ allora\ \ \vdash B$
  - (regola di Pierce) $\quad se\ \neg A \vdash A\ \ allora\ \ \vdash A$

Reductio Ad Absurdum (RAA)

- **(RAA)** $se\ \neg A \vdash \perp\ allora\ \vdash A$

- I sistemi logici che si ottengono *assumendo* la regola (RAA) sono detti **sistemi classici** (quelli che vediamo ora)

- I sistemi logici che si ottengono *rifiutando* la regola (RAA) I secondi sono noti come **sistemi intuizionisti**

La regola del taglio

- **(taglio)** $se\ \Gamma \vdash A\ e\ \Gamma, A \vdash B\ allora\ \Gamma \vdash B$

- Serve per decomporre le dimostrazioni

Sistemi deduttivi

- *Deduzione naturale*
- Sistemi assiomatici
- *Calcolo dei sequenti*
- Tableaux

Deduzione Naturale

- È stata introdotta da Gentzen

- Notazione
  - usa una linea orizzontale $\overline{\qquad\qquad}$ al posto di $\vdash$
  - Regole elementari $\dfrac{Premesse}{Conclusioni}$
  - Regole condizionali (premesse sussidiarie) $\dfrac{\begin{array}{c}[Premesse\ sussidiarie] \\ \underline{Conclusioni\ sussidiarie}\end{array}}{Conclusioni}$

Regole: congiunzione

- $(\wedge\, e.1)$ $\dfrac{A \wedge B}{A}$

- $(\wedge\, e.1)$ $\dfrac{A \wedge B}{B}$

- $(\wedge\, i)$ $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$

Regole Disgiunzione

- $(\vee\, i.1) \quad \dfrac{A}{A \vee B}$

- $(\vee\, i.2) \quad \dfrac{B}{A \vee B}$

- $(\vee\, e) \; \dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] & [B] \\ C & C\end{matrix}}{C}$

$se\ A \vdash C\ e\ B \vdash C\ allora\ A \vee B \vdash C$

Regole: Implicazione

- $(\rightarrow e)$ $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$ (*Modus Ponens*)

- $(\rightarrow i)$ $$\frac{\begin{matrix}[A] \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}$$

Regole: Falsità e Negazione

- $(\perp e)$ $\quad \dfrac{\perp}{A}$

- $(\neg e)$ $\quad \dfrac{A \quad \neg A}{\perp}$

- $(\neg i)$ $\quad \dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \perp\end{matrix}}{\neg A}$

Regole: RAA

- (RAA) $$\frac{\begin{array}{c}[\neg P]\\ \bot\end{array}}{P}$$

Albero di derivazione

- La deduzione si calcola dal basso verso l'alto
- Si parte dalla formula da dedurre (la radice)
- Si procede costruendo l'albero fino ad arrivare alle ipotesi (le foglie)
- Se l'insieme delle foglie dell'albero è contenuto in Γ e la radice è C, l'albero rappresenterà una dimostrazione di $\Gamma \vdash C$
- Composizione possibile grazie alla regola di taglio
  - $se\ \Gamma \vdash A\ e\ \Gamma, A \vdash B\ allora\ \Gamma \vdash B$

Esempio di Deduzione Naturale

- $A \land B, B \land A \rightarrow C \vdash C \lor D$

Regole Condizionali nell’albero di derivazione

- OSS: le premesse sussidiarie $\frac{\frac{[Premesse\ sussidiarie]}{Conclusioni\ sussidiarie}}{Conclusioni}$ non sono premesse

- le premesse sussidiarie sono ipotesi che possono essere ***cancellata***

- Se l’insieme delle foglie *non cancellate* dell’albero è contenuto in Γ e la radice è C, l’albero rappresenterà una dimostrazione di Γ ⊢ C

Esempio di deduzione

- $\vdash_{DN} \ A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Esempio di deduzione

- $\vdash_{DN} A \rightarrow \neg\neg A$

Esempio di deduzione

- $\vdash_{DN} (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Sistemi assiomatici

- Hanno un'unica regola di inferenza:
  - $(\to e)\ A, A \to B \vdash B$ (*Modus Ponens*)
- Si introducono alcuni assiomi al posto delle altre regole
- Difficile sviluppare dimostrazioni nel sistema assiomatico

Calcolo dei sequenti

- Introdotto anche questo da Gentzen

- Differente dai due sistemi precedenti per due cose:
  1. Il calcolo dei sequenti lavora non su fbf ma su asserzioni di derivabilità del tipo:
  $$A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$$
  $$\Gamma \vdash \Delta$$
  chiamate **sequenti**

  2. I connettivi logici possono essere solo introdotti e mai eliminati.

Notazione

- Le formule di Γ vanno pensate come unite dal connettivo $\wedge$
- Le formule di Δ vanno pensate unite dal connettivo $\vee$
- Es: $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ deve essere pensato come:

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \cdots \vee B_m$$

- Una **regola di inferenza** ha la seguente forma:
  - $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$
  - $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$

Assiomi e regole

- **Assiomi:** i sequenti della forma
  - $A \vdash A$ (Ax)
- Regole di tre tipi:
  - Taglio
  - Strutturali:
    - permutazione
    - contrazione
    - indebolimento
  - Logiche (i.e. quelle concernenti i connettivi logici)

Regole del sistema LK (Logik Klassische)

$$(Ax) \quad A \vdash A$$

$$(taglio) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

$$(perm-l) \quad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}$$

$$(perm-r) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}$$

$$(contr-l) \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$$

$$(contr-r) \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$(indeb-l) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$$

$$(indeb-r) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

$$(\wedge l.1) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\wedge r) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\wedge l.2) \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\vee l) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$(\vee r.1) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

$$(\vee r.2) \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

$$(\rightarrow l) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$$

$$(\rightarrow r) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg l) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

$$(\neg r) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

Calcolo

- Scrivere l'**intero** sequente in basso
- Identificare i connettivi più esterni
  - scegliere (a caso) uno di essi
  - utilizzare la regola corrispondente al connettivo:
    - se il connettivo è a destra di $\vdash$ si usa la regola destra (r)
    - se il connettivo è a sinistra di $\vdash$ si usa la regola sinistra (l)
    - tracciare una riga sopra al sequente e implementare la regola
- Continuare con i sequenti generati usando la regola 2. finché non si arriva ad un assioma (es. $A \vdash A$)

Esempio

- Dimostrare che $C \vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg(B \vee A)$