Esercizio 1. *Calcolare:*

$$\iint_T xy \, dx dy$$

sul triangolo di vertici $(0,0), (1,1), (3,-1)$

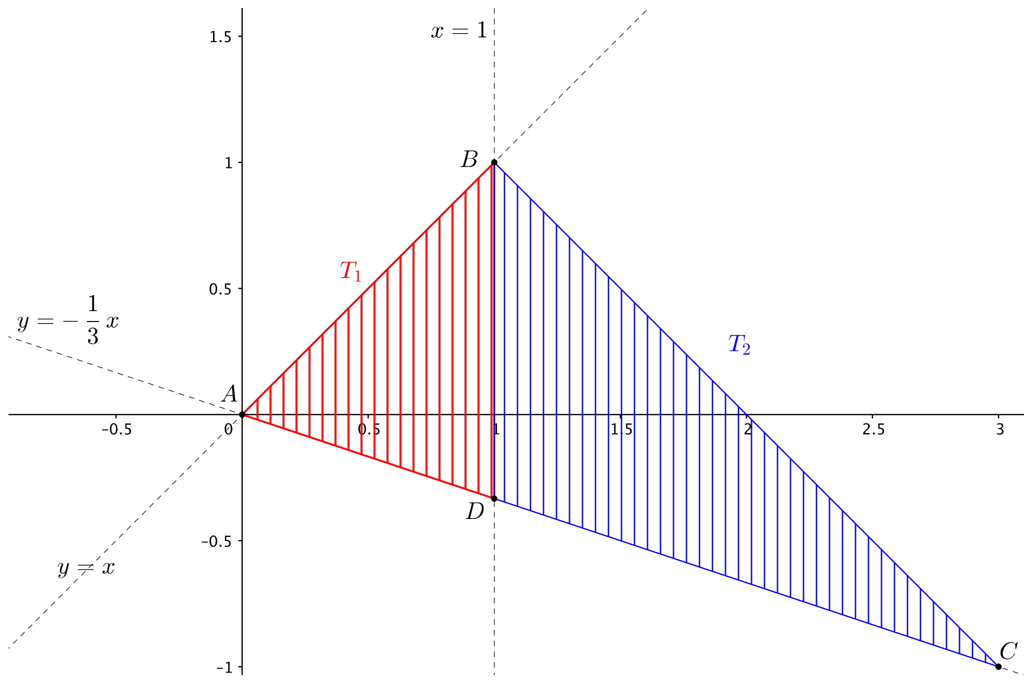

Figura 1: L'insieme T

Soluzione. Possiamo suddividere il triangolo dato in due triangoli T_1 e T_2 (rispettivamente in rosso ed in blu nella Figura 1) definiti da:

$$T_1 = \left\{ 0 \le x \le 1, -\frac{1}{3}x \le y \le x \right\}$$
$$T_2 = \left\{ 1 \le x \le 3, -\frac{1}{3}x \le y \le 2 - x \right\}$$

Per la formula di riduzione si ha che:

$$\iint_T xy \, dx dy = \iint_{T_1} xy \, dx dy + \iint_{T_2} xy \, dx dy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_{-\frac{x}{3}}^{x} xy \, dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_{-\frac{x}{3}}^{2-x} xy \, dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=-\frac{x}{3}}^{y=x} \right) dx + \int_1^3 \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=-\frac{x}{3}}^{y=2-x} \right) dx =$$
$$\int_0^1 \frac{4}{9}x^3 \, dx + \int_1^3 \frac{x}{2} \left(4 + x^2 - 4x + \frac{1}{9}x^2 \right) dx = -\frac{1}{3}.$$

Esercizio 2. *Calcolare:*

$$\iint_D \sqrt{y - x^2 + 2}\, dxdy$$

ove

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x^2 - 2 \le y \le x^2\right\}$$

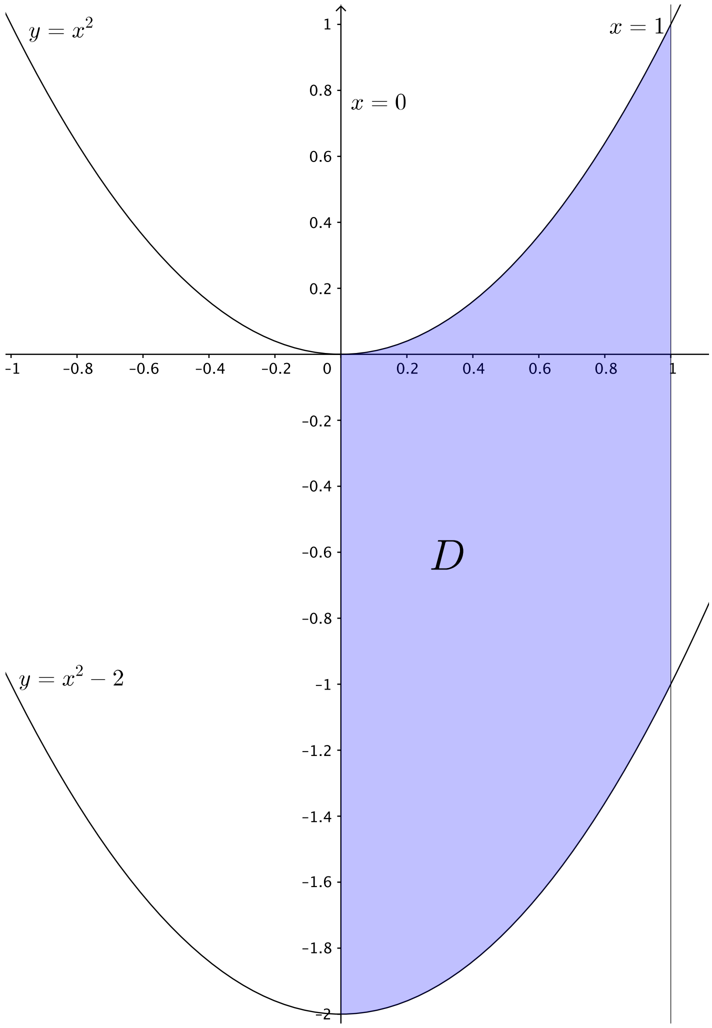

Figura 2: L'insieme D

Soluzione. Optiamo per un cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = u \\ y = v + u^2 \end{cases}$$

la cui matrice Jacobiana associata è data da:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}$$

e il cui determinante è 1. Inoltre tale trasformazione manda l'insieme D in

$$E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 0\}$$

Pertanto:

$$\iint_D \sqrt{y - x^2 + 2}\, dxdy = \iint_E \sqrt{v + 2}\, dudv = \int_{-2}^{0} \left(\int_0^1 \sqrt{v + 2}\, du \right) dv =$$
$$\int_0^1 \left(\int_{-2}^{0} \sqrt{v + 2}\, dv \right) du = 1 \cdot \int_{-2}^{0} \sqrt{v + 2}\, dv = \int_0^2 \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Esercizio 3. *Calcolare:*

$$\iint_B 2x + y\, dxdy$$

ove B è la regione di piano compresa tra le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$ e le rette $y = x$, $y = -\sqrt{3}x$ nel semipiano $y \geq 0$.

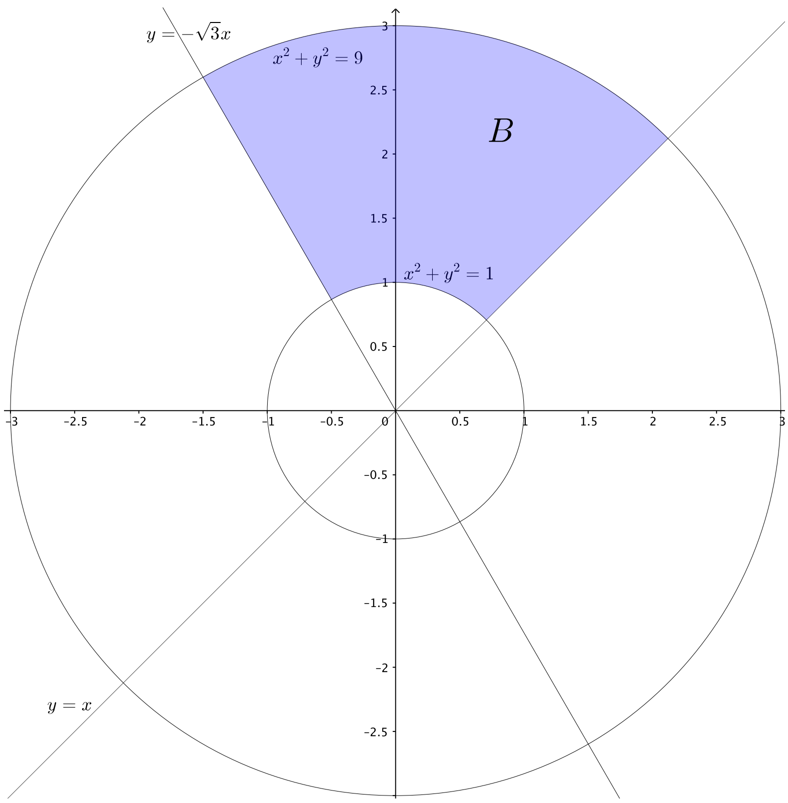

Figura 3: L'insieme B

Soluzione. Optiamo per un cambio di coordinate passando a coordinate polari.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases}$$

la cui matrice Jacobiana associata è data da:

$$J(\alpha,\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\rho\sin\alpha \\ \sin\alpha & \rho\cos\alpha \end{pmatrix}$$

e il cui determinante è ρ. Inoltre tale trasformazione manda l'insieme B in

$$C = \{(\rho,\alpha) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) : 1 \le \rho \le 3, \frac{1}{4}\pi \le \alpha \le \frac{2}{3}\pi\}$$

Pertanto:

$$\iint_B 2x + y\, dxdy = \iint_C \rho(2\cos\alpha + \sin\alpha)\, d\rho d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\int_1^3 \rho^2(2\cos\alpha + \sin\alpha)\, d\rho\right) d\alpha =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2}{3}\pi} (2\cos\alpha + \sin\alpha) \left(\int_1^3 \rho^2\, d\rho\right) d\alpha = \frac{26}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2}{3}\pi} (2\cos\alpha + \sin\alpha) d\alpha$$

$$= \frac{26}{3}\left[2\sin\alpha - \cos\alpha\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{26}{3}\left[2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{13}{3}\left[2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}\right].$$

Esercizio 4. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin(2x)}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4$$

le cui radici sono $2i$ e $-2i$ e pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata è data da:

$$C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$$

$\cos(2x)$ e $\sin(2x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale data. Chiamiamo $S_1(x) = \cos(2x)$ e $S_2(x) = \sin(2x)$. Costruiamo la seguente matrice:

$$W(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) & S_2(x) \\ S_1'(x) & S_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare dell'equazione data andrà quindi cercata tra quelle della forma:

$$\varphi_1(x)\cos(2x) + \varphi_2(x)\sin(2x)$$

chiedendo che φ_1 e φ_2 risolvano il sistema

$$W(x)\begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(2x)} \end{pmatrix}$$

trovando pertanto:

$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \varphi_2'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

da cui:

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2}x \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{4}\ln|\sin(2x)|.$$

Esercizio 5. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' + y = xe^x \sin(2x)$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

le cui radici sono i e i e pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata è data da:

$$C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

$\cos(x)$ e $\sin(x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale data. Chiamiamo $S_1(x) = \cos(x)$ e $S_2(x) = \sin(x)$. Costruiamo la seguente matrice:

$$W(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) & S_2(x) \\ S_1'(x) & S_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare dell'equazione data andrà quindi cercata tra quelle della forma:

$$\varphi_1(x)\cos(x) + \varphi_2(x)\sin(x)$$

chiedendo che φ_1 e φ_2 risolvano il sistema

$$W(x) \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \sin(2x) \end{pmatrix}$$

trovando pertanto:

$$\begin{cases} \cos(x)\varphi_1'(x) + \sin(x)\varphi_2'(x) = 0 \\ -\sin(x)\varphi_1'(x) + \cos(x)\varphi_2'(x) = xe^x \sin(2x) \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\sin(x)$ e la seconda per $\cos(x)$ troviamo sommando:

$$\begin{cases} \cos(x)\varphi_1'(x) + \sin(x)\varphi_2'(x) = 0 \\ -\sin(x)\varphi_1'(x) + \cos(x)\varphi_2'(x) = xe^x \sin(2x) \end{cases}$$

da cui:

$$\varphi_2'(x) = xe^x \sin(2x)\cos(x)$$

Sarebbe possibile integrare la φ_2 ma richiederebbe troppi calcoli. In questo caso meglio ricorrere al metodo di simiglianza come fatto la scorsa settimana.

Esercizio 6. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

le cui radici sono 1 e 2 e pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata è data da:

$$C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

e^x e e^{2x} sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale data. Chiamiamo $S_1(x) = e^x$ e $S_2(x) = e^{2x}$. Costruiamo la seguente matrice:

$$W(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) & S_2(x) \\ S_1'(x) & S_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare dell'equazione data andrà quindi cercata tra quelle della forma:

$$\varphi_1(x)e^x + \varphi_2(x)e^{2x}$$

chiedendo che φ_1 e φ_2 risolvano il sistema

$$W(x) \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{e^x+2} \end{pmatrix}$$

trovando pertanto:

$$\begin{cases} e^x\varphi_1'(x) + e^{2x}\varphi_2'(x) = 0 \\ e^x\varphi_1'(x) + 2e^{2x}\varphi_2'(x) = \frac{e^x}{e^x+2} \end{cases}$$

trovando pertanto:

$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{e^x + 2} \qquad \varphi_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x + 2)}$$

da cui:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + 2e^{-x}) \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{4}[\ln(2e^{-x} + 1) - 2e^{-x}].$$