Lezione 8 novembre 2021

lunedì 8 novembre 2021 15:01

Visto: Proprietà (D1), (D2) e (D3) del determinante

CONSEGUENZE: su $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (non campo finito)

① Se $A \in M_n(K)$ che ha 2 righe uguali
$\Rightarrow \det A = 0$

② Se A ha una riga tutta nulla, allora
$\det A = 0$

③ Se $\tilde{A}$ è ottenuta da A tramite (OE1) e (OE3)

$$\Rightarrow \det \tilde{A} = (-1)^{\sigma} \cdot \det A$$

σ = sigma

dove $\sigma = \#$ di volte OE1
$= \#$ di scambi

④ Sia A una MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE: cioè

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

cioè $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i,j$ con $i > j$.

Allora: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

In particolare: questo vale per tutte le matrici a scala, e anche per le matrici diagonali.

Dim. ① Supp. $A_{(i)} = A_{(j)} \quad i \neq j$

per la (D2)
$$\det A = \det \underbrace{\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}}_{=A} = -\det \underbrace{\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}}_{=A} = -\det A$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

② Supp. $A_{(i)} = (0\ 0 \cdots 0) = 0 \cdot (1\ 1 \cdots 1)$

$$\text{(D1)} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ 0 \cdot (1\ 1 \cdots 1) \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ (1\ 1 \cdots 1) \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = 0$$

③ Facendo (OE3):

$$A_{(i)} \longleftarrow A_{(i)} + c \cdot A_{(j)}$$

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + c \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \overset{\text{D1}}{=} \det \underbrace{\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}}_{=A} + c \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{ha 2 righe uguali} \\ \Rightarrow \det = 0}} = \det A$$

Invece: (OE1) è uno scambio di righe; per la (D2), ad ogni scambio, cambia il segno del det, e trovo la $\det \tilde{A} = (-1)^{\sigma} \cdot \det A$

④ Sia A matrice triangolare sup., $A \in M_n(K)$

Per induzione su n

- Se $n = 1$, $A = (a_{11})$, $\det A = a_{11}$ ☺

- Supp. vero per $n-1$, e dimostriamo per n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= A_{11} \in M_{n-1}(K)$ ed è TRIANG. SUP.

applico la def:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} = a_{11} \cdot \det A_{11}$$

Per l'ipotesi induttiva,

$$\det A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$$\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot \det A_{11} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

COROLLARIO:
$A \in M_n(K)$. Allora

$$\operatorname{rg} A < n \iff \det A = 0.$$

Dim.: Supp. $\operatorname{rg} A < n$ e sia $\tilde{A}$ a scala ottenuta da A con OE1 e OE3.

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} < n \Rightarrow \tilde{A}$ ha almeno una riga nulla $\Rightarrow \det \tilde{A}$ = prodotto dei coeff. sulla diagonale
$= 0$, perché sulla riga nulla c'è un elemento della diagonale

$$0 = \det \tilde{A} = (-1)^{\sigma} \det A$$

$\Rightarrow \det A = 0.$

Viceversa: Supp. $\det A = 0$

$\Rightarrow \det \tilde{A} = (-1)^{\sigma} \cdot \det A = 0$

$\Rightarrow \tilde{A}$ ha almeno una riga nulla, perché altrimenti i PIVOT sarebbero su diagonale, e quindi $\det \tilde{A} \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} < n \Rightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = \operatorname{rg} A < n$

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & & * \\ 0 & * & * & \\ \vdots & 0 & * & \\ & & & * \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$$