Lezione 9 novembre 2021

martedì 9 novembre 2021 11:12

FORMULE DI LAPLACE PER IL DETERMINANTE

Abbiamo visto la def.:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

TEOREMA DI LAPLACE:

① Il det di $A \in M_n(K)$ può essere calcolato fissando una qualunque colonna: $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

SVILUPPO DEL DET RISPETTO COLONNA j

② Il det di $A \in M_n(K)$ può essere calcolato fissando una qualunque riga: $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det A_{kl}$$

SVILUPPO DEL DET RISPETTO ALLA RIGA k

DIM.: Si dimostra che le 2 espressioni verificano (D1), (D2) e (D3). Per l'unicità del determinante, si ha la tesi.

COROLLARIO: $\det A = \det {}^tA$.

Dim. Dalla definizione si ha:

$$\det {}^tA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \underbrace{\det ({}^tA)_{i1}}_{= \det A_{1i}}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \cdot \det A_{1i}$$

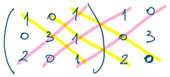
= SVILUPPO del DET rispetto alla PRIMA RIGA di A $\underset{\text{Laplace}}{\overset{}{=}}$ $\det A$

~ . ~ . ~ . ~ . ~

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo det in vari modi diversi:

① calcoliamo det A con SARRUS:



$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1$

$= 3 - 6 = -3$

② Calcoliamo det ${}^tA$ con SARRUS:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\det {}^tA = 1\cdot 3\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 1 = 3 - 6 = -3$$

③ Calcoliamo det A con la definizione (quindi con sviluppo secondo la prima colonna):

$$\det A = (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1}\cdot a_{21}\cdot \det A_{21} + (-1)^{3+1}\cdot a_{31}\cdot \det A_{31}$$

$$= 1\cdot 1\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=3} - 1\cdot 0\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=0} + 1\cdot 2\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=-3}$$

$$= 3 - 0 - 6 = -3$$

④ Calcoliamo det A con la Formula di Laplace secondo la terza riga $A_{(3)}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \sum_{l=1}^{3} (-1)^{3+l}\, a_{3l}\cdot \det A_{3l}$$

$$\det A = (-1)^{3+1}\cdot a_{31}\cdot \det A_{31} + (-1)^{3+2}\cdot a_{32}\cdot \det A_{32} + (-1)^{3+3}\cdot a_{33}\cdot \det A_{33}$$

$$= 1\cdot 2\cdot (-3) - 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 = -6 + 3 = -3$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

~ · ~ · ~ · ~ · ~

DETERMINANTE DI UN PRODOTTO DI MATRICI:

TEOREMA DI BINET:

$\forall\, A, B \in M_n(K)$

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$$

DIM. OMESSA

COROLLARIO: Se $A \in M_n(K)$ invertibile, allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Dim. $A \cdot A^{-1} = I_n$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n$$

$$\overset{\text{Binet}}{=} \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$(\Longrightarrow \det A \neq 0)$

$$\Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~

FORMULA DEI COFATTORI PER LA MATRICE INVERSA:

Def.: Sia $A \in M_n(K)$, e fissiamo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Il COFATTORE i,j di A è lo scalare

$$(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

La MATRICE DEI COFATTORI

$$\mathrm{Cof}(A)$$

la matrice che ha nella posizione i,j il cofattore i,j.

oss.: I cofattori di A hanno segno che dipende dalla parità di $i+j$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

posti di tipo pari

e posti di tipo dispari

TEOREMA: $\forall A \in M_n(K)$

$$A \cdot {}^t(\text{Cof } A) = {}^t(\text{Cof } A)\cdot A = \det A \cdot I_n = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A\end{pmatrix}$$

COROLLARIO: se $\det A \neq 0$, si ha

$$A\cdot \frac{1}{\det A}\cdot {}^t(\text{Cof } A) = \frac{1}{\det A}\cdot {}^t(\text{Cof } A)\cdot A = I_n$$

e quindi A è invertibile, e si ha:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(\text{Cof } A)}$$

* * *

Infine: la formula dei cofattori può essere utilizzata nel Teorema di Cramer:

A invertibile $\Longrightarrow$ $A\cdot x = b$ ha 1! soluzione

$$s = A^{-1}\cdot b$$

FORMULA DI CRAMER: l'i-esima componente di tale s è data da

$$s_i = \frac{\det\left(A^{(1)} A^{(2)} \dots \overset{\substack{\text{COLONNA } i \\ \downarrow}}{b} \dots A^{(n)}\right)}{\det A}$$

componente i del vettore $A^{-1}\cdot b$

Dim.: $\underbrace{(\underset{n\times n}{A^{-1}}\cdot \underset{n\times 1}{b})}\,_{i} = (A^{-1})_{(i)}\cdot b$

$n \times 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(A^{-1}\right)_{(ik)}}_{\text{elemento di posto } ik \text{ di } A^{-1}} \cdot b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} \cdot \left({}^{t}\mathrm{Cof} A\right)_{ik} \cdot b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} \cdot \left(\mathrm{Cof} A\right)_{ki} \cdot b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} (-1)^{k+i} \cdot \det \underbrace{A_{ki}}_{\text{minore } ki} \cdot b_k$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot b_k \cdot \det A_{ki}$$

es. $i=1$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot b_k \cdot \det A_{k1} = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{pmatrix}$$

Per i qualunque:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} b_k \cdot \det A_{ki} = \det \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & \overset{\text{colonna } i}{b_1} & \cdots\ a_{1n} \\ a_{21} & & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & & b_n & a_{nn} \end{array}\right) \end{array}$$

sviluppo rispetto alla colonna i della matrice $\longrightarrow$