Lezione 19 novembre 2021
venerdì 19 novembre 2021 11:13

GEOMETRIA DEL PIANO AFFINE

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \quad (= \mathbb{R}^2)$

fissiamo riferimento affine canonico, cioè:

$O = (0,0)$, base di $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$

SSA : $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, dim $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = 2$

se S è SSA : $\dim S = \begin{cases} 0 & S = \{Q\} \\ 1 & \text{RETTE} \\ 2 & S = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \end{cases}$

∼ · ∼ · ∼ · ∼

RETTE PIANE : $r \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

è determinata da $Q = (q_1, q_2)$ e

$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

EQ. PARAM: $\begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases}$

passaggio da eq. param. a eq. cartesiane:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \end{pmatrix} = 0$$

$l(y - q_2) - m(x - q_1) = 0$ EQ. CART.

ovvero: $-mx + ly = lq_2 - mq_1$

VICEVERSA, se r è data da:

$ax + by = c$ con $a \neq 0$ opp. $b \neq 0$

supp. $a \neq 0$: $x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}$

y incognita libera : $y = t$

$x = -\frac{b}{a}t + \frac{c}{a}$

$\Longrightarrow$ EQ. PAR. $\begin{cases} x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} t \\ y = t \end{cases}$

input. $Q = (c/a, 0)$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

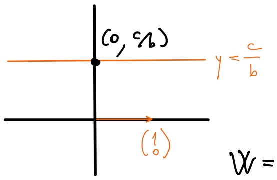
siccome $a \neq 0$ $\quad = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)$

Se $a = 0$, allora $b \neq 0$

$by = c$

· $y = \frac{c}{b}$: x incognita libera

eq. parametriche: $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$



$Q = (0, c/b)$

$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

* * *

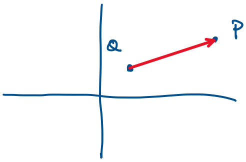
RETTA PER 2 PUNTI

$P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $P \neq Q$

$\exists!\, r$ t.c. $P \in r$ e $Q \in r$?

OSS: scelgo Q come punto fissato

e oss. $P \in r \iff \overrightarrow{QP} \in W_r$



Siccome $Q \neq P \Rightarrow \overrightarrow{QP} \neq 0$ vettore nullo

e $W_r = \mathrm{Span}(\overrightarrow{QP})$

$\Rightarrow$ la retta r $\exists$, ed è univocamente determinata dal passaggio per Q e dalla direzione $\overrightarrow{QP}$

EQ. PARAM. : $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix}$

$Q = (q_1, q_2)$

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + (p_1 - q_1)t \\ y = q_2 + (p_2 - q_2)t \end{cases}}$$

EQ. CARTESIANA :

$$\det \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & x - q_1 \\ p_2 - q_2 & y - q_2 \end{pmatrix} = 0$$

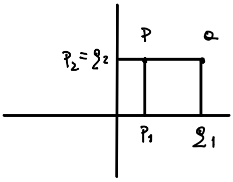
$$\boxed{(p_1 - q_1)(y - q_2) - (p_2 - q_2)(x - q_1) = 0}$$ ☺

$$-(p_2 - q_2)x + (p_1 - q_1)y = q_2(p_1 - q_1) - q_1(p_2 - q_2)$$

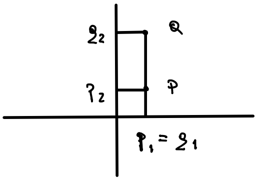
$$(p_1 - q_1)(y - q_2) = (p_2 - q_2)(x - q_1)$$

$$\boxed{\frac{(y - q_2)}{(p_2 - q_2)} = \frac{(x - q_1)}{(p_1 - q_1)}}$$ ⚠

Questa equazione è lecita $\Longleftrightarrow$ $p_2 \neq q_2$ e $p_1 \neq q_1$



NO



NO

CONDIZIONI DI PARALLELISMO E INCIDENZA

$r, r' \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ in eq. parametriche

$r: \begin{cases} x = q_1 + l t \\ y = q_2 + m t \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} x = q_1' + l' t \\ y = q_2' + m' t \end{cases}$

r e r' sono PARALLELE : $r \parallel r'$

$\iff W_r = W_{r'}$

$\iff \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}\right)$

$\iff \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$ sono proporzionali

$\iff \mathrm{rg}\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = 0$

$\iff \boxed{l m' - l' m = 0}$ CONDIZ. DI $\parallel$

Si presentano 2 casi : r e r' sono parallele "vere"
(nel senso $r \neq r'$)
oppure r e r' parallele "false"
(nel senso $r = r'$)

Si ha che $r \parallel r'$ e $r = r' \iff r \cap r' \neq \emptyset$

Per studiare $r \cap r'$ cons. il SL $\boxed{\begin{cases} q_1 + l t = q_1' + l' z \\ q_2 + m t = q_2' + m' z \end{cases}}$ $\circledast$

è un SL di
2 eq. in 2
incognite t e z

INFATTI:

$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in r \cap r' \iff \exists\ \bar{t}$ e $\bar{z}$ tali che

$$\begin{cases} \bar{x} = q_1 + l \bar{t} \\ \bar{y} = q_2 + m \bar{t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = q_1' + l' \bar{z} \\ \bar{y} = q_2' + m' \bar{z} \end{cases}$$

Studio di $\circledast$:

$$\begin{cases} \ell t - \ell'\tau = q_1' - q_1 \\ m t - m'\tau = q_2' - q_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} \ell & -\ell' \\ m & -m' \end{matrix}}_{=A} \,\middle|\, \begin{matrix} q_1' - q_1 \\ q_2' - q_2 \end{matrix}\right)}$$

; Siccome $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \ell & \ell' \\ m & m' \end{pmatrix} = 1$

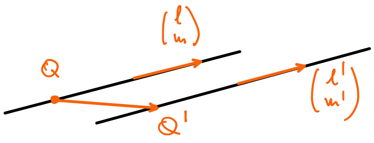
$\Rightarrow$ anche $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \ell & -\ell' \\ m & -m' \end{pmatrix} = 1$

Quindi

$\operatorname{rg} A = 1$ $\qquad = (A|b)$

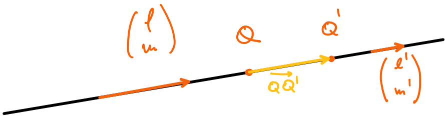
il SL è compatibile $\overset{RC}{\Longleftrightarrow}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 1$

Osservo che il vettore dei termini noti $\begin{pmatrix} q_1' - q_1 \\ q_2' - q_1 \end{pmatrix}$ corrisponde al vettore $\overrightarrow{QQ'}$.


$\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$
Q
$\begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix}$
Q'

In questo caso il vettore $\overrightarrow{QQ'}$ non è proporzionale a $\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \ell & -\ell' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{pmatrix} = 2 \neq 1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \ell & -\ell' \\ m & -m' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ le due rette non si intersecano e sono "vere" parallele


$\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$
Q
Q'
$\overrightarrow{QQ'}$
$\begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix}$

In questo caso il vettore $\overrightarrow{QQ'}$ è proporzionale a $\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \ell & -\ell' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{pmatrix} = 1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \ell & -\ell' \\ m & -m' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ le due rette si intersecano, e la loro intersezione ha dimensione $n - \operatorname{rg} A = 2 - 1 = 1$, quindi le due rette coincidono

Invece: $r \nparallel r'$: r e r' NON sono parallele

$\Longleftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} \ell & \ell' \\ m & m' \end{pmatrix} \neq 0$: $\boxed{\ell m' - \ell' m \neq 0}$

$$\iff \quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = 2$$

Vediamo cosa c'è in $r \cap r'$ in questo caso:

$$\begin{cases} q_1 + lt = q_1' + l'\varepsilon \\ q_2 + mt = q_2' + m'\varepsilon \end{cases} , \quad \begin{cases} lt - l'\varepsilon = q_1' - q_1 \\ mt - m'\varepsilon = q_2' - q_2 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} l & -l' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{array}\right) \text{ di tipo } 2 \times 3$$

RC : il SL è compat. $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$

$\operatorname{rg} A = 2 \implies \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|b) \leq 2$

$\implies \operatorname{rg}(A|b) = 2 \implies$ il SL è compatibile,

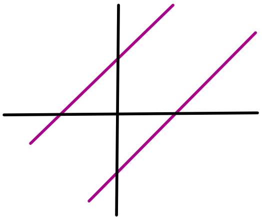
e per il Teorema di Cramer il SL ha 1! soluzione, data da $A^{-1} \cdot b$

data $A^{-1} \cdot b$

Quindi: 2 rette piane possono essere:

- coincidenti
- parallele (e allora non si intersecano)
- incidenti (e allora si intersecano esattamente in 1 punto)

CONFRONTO con rette con eq. esplicita $y = mx + q$:



$r: \; y = mx + q$

$r': \; y = m'x + q'$

in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = q + m t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = q' + m' s \end{cases}$$

$$r \parallel r' \iff rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{pmatrix} = 1$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 1 \cdot m' - 1 \cdot m = 0 \iff m = m'$$