Lezione 15 novembre 2021

lunedì 15 novembre 2021 14:56

Ricordo $S \subseteq A$ è SSA passante per Q e con giacitura $W \subseteq V$:

$$S = \{P : \vec{QP} \in W\}$$

Se: $A = A^n_{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R}^n)$

scrivendo Q in componenti, e fissando una base di W, possiamo ottenere delle equazioni parametriche per S.

OSS.: le eq. parametriche si possono determinare in un qualunque spazio affine, A, in cui abbiamo un RIFERIMENTO AFFINE:
- $O \in A$ origine
- base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V

Infatti, con tali dati, è possibile assegnare delle COORDINATE:
- ad ogni punto di A
- ad ogni vettore di V

Se $Q \in A^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ con q_i componenti di Q

Se $Q \in A$ $\rightsquigarrow$ coordinate affini di Q

base $\{w_1, \dots, w_k\}$ di $W \subseteq V = \mathbb{R}^n$

$\rightsquigarrow$ ogni w_i ha n componenti

se $\{w_1, \dots, w_k\}$ base di $W \subseteq V$ SV qualunque

$\rightsquigarrow \forall\, w_i$, cons. le COORDINATE di w_i nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V

OSS.: le componenti di un punto $Q \in A^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ corrispondono alle COORDINATE di Q nel riferimento affine:

$O = (0, 0, \dots, 0)$

base di $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica

INFATTI: $Q \in \mathbb{R}^n = A^n_{\mathbb{R}}$

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$O = (0, 0, \dots, 0)$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 0 \\ q_2 - 0 \\ \vdots \\ q_n - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Coordinate di $\vec{OQ}$ nella base $\mathcal{E}$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = q_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + q_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + q_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono $(q_1, q_2, \dots, q_n)$

PARALLELISMO, INCIDENZA E SGHEMBITÀ

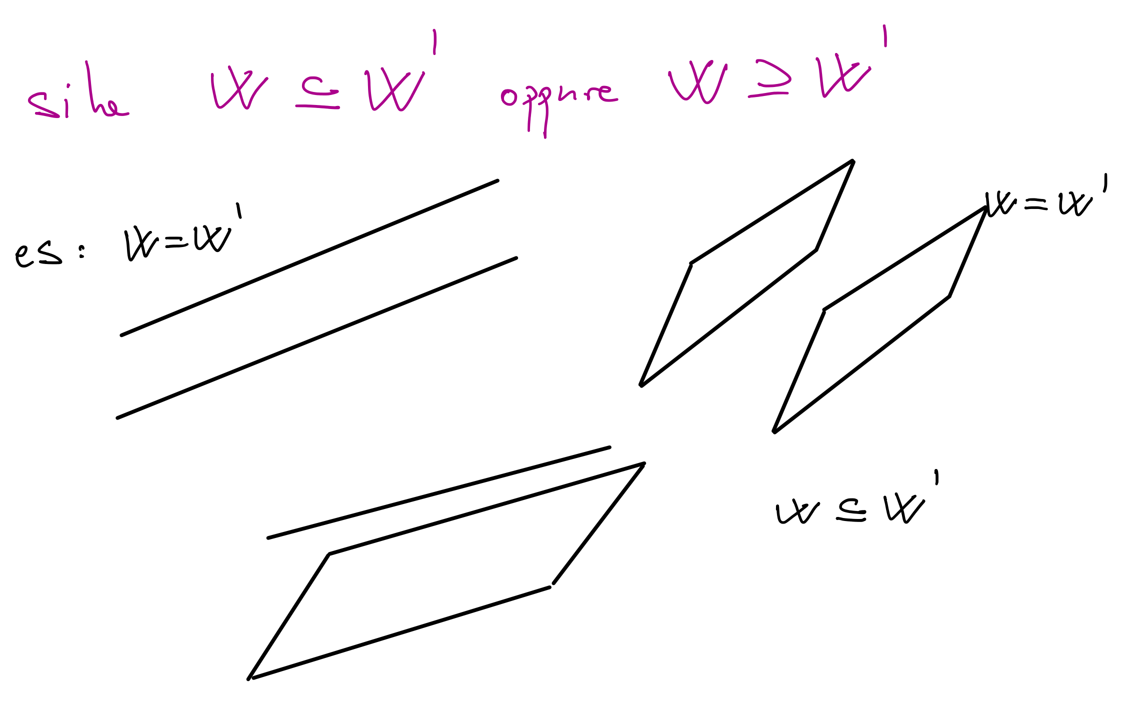
Def.: Cons. 2 SSA: $S, S' \subseteq A$

siano W: giac. di S

W': giac. di S'

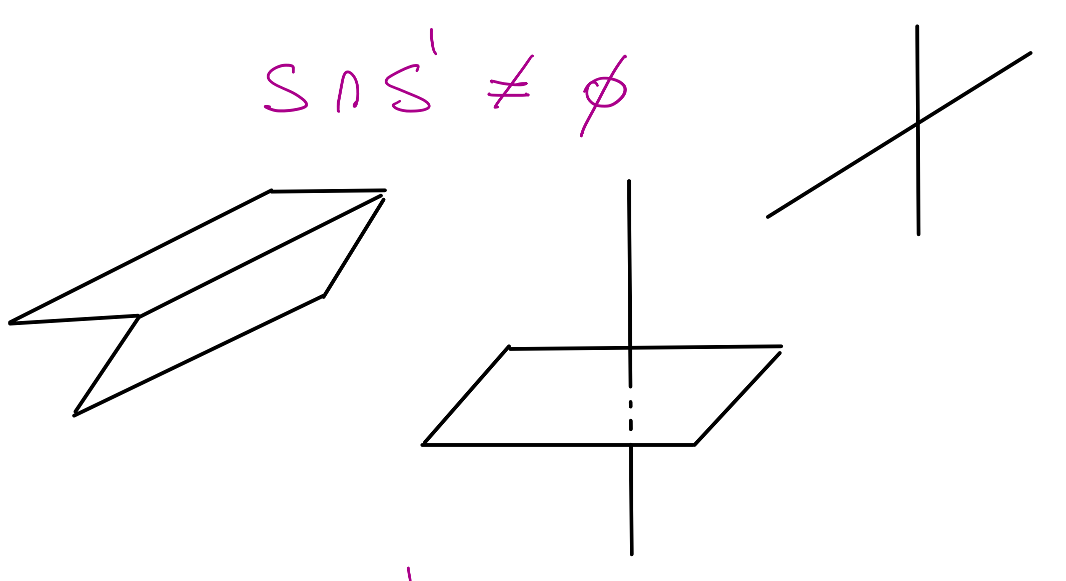
① S e S' sono PARALLELI se si ha $W \subseteq W'$ oppure $W \supseteq W'$

es: $W = W'$

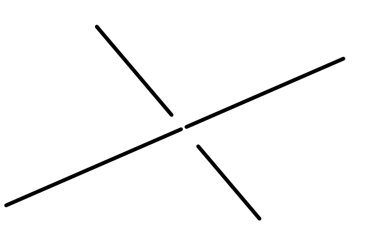


② S e S' sono INCIDENTI se

$$S \cap S' \neq \emptyset$$



③ S e S' si dicono SGHEMBI se NON sono PARALLELI e NON sono INCIDENTI



Esempi:

Cons. la retta piana: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$

passa per il punto $Q = (1, 2)$, e ha giacitura $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Altre rappresentazioni parametriche della stessa retta:

$$\begin{cases} x = 1 + z \\ y = 2 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + u \\ y = 1 - u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - 2s \end{cases}$$

Cons. la retta dello spazio A^3:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

passa per il punto $Q = (1, 2, 3)$ e ha giacitura $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Altre rappresentazioni parametriche della stessa retta:

$$\begin{cases} x = 2 + z \\ y = 1 - z \\ z = 5 + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 2u \\ y = 2 - 2u \\ z = 3 + 4u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 2 + 2s \\ z = 3 - 4s \end{cases}$$

Cons. il piano nello spazio A^3:

$$H: \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t - s \\ z = 3 + 2t - 2s \end{cases}$$

passa per il punto $Q = (1, 2, 3)$ e ha giacitura $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

Piano parallelo ad H:

$$H': \begin{cases} x = 5 + t + s \\ y = 6 - t - s \\ z = 7 + 2t - 2s \end{cases}$$

passa per il punto $Q' = (5, 6, 7)$ e ha giacitura $W' = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = W$

Notiamo che $Q' \notin H$; infatti:

il SL $\begin{cases} 1 + t + s = 5 \\ 2 - t - s = 6 \\ 3 + 2t - 2s = 7 \end{cases}$ è incompatibile

$$\begin{cases} t + s = 4 \\ -t - s = 4 \\ 2t - 2s = 4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Anche il piano

$$H'': \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = 6 + 2t + 4s \end{cases}$$

è parallelo ad H:

passa per $Q'' = (2, 4, 6)$ ed ha giacitura

$$W'' = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = W$$

ESERCIZIO

La retta $r: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ è parallela ad H

infatti ha giacitura $W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \subseteq W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

anche la retta $r': \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 3 + 4z \end{cases}$ è parallela ad H

infatti $W_{r'} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = W$

Infine: r e r' sono SGHEMBE; infatti

$W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \neq \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = W_{r'}$, quindi non sono parallele

Vediamo se sono incidenti: cons. il SL

$$\begin{cases} 5 + t = -3 \\ 2 - t = 2 \\ 3 + 2t = 3 + 4z \end{cases}$$ è incompatibile

$$\begin{cases} t = -8 \\ -t = 0 \\ 2t - 4z = 0 \end{cases}$$ impossibile