$S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$

Ieri: Dato S con eq. cartesiane, risolvendo il SL corrispondente, troviamo delle equazioni parametriche per S.

Oggi:

PASSAGGIO DA EQ. PARAMETRICHE A EQ. CARTESIANE

Prop.: Ogni SSA $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ ammette delle eq. cartesiane.

Dim.: S passante per $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ e con giacitura $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$

$\{w_1, \dots, w_k\}$ base di W

$$w_i = \begin{pmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \\ \vdots \\ w_{ni} \end{pmatrix}$$

$$P \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W$$

$$\iff$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\iff$$

la matrice
$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1k} & x_1 - q_1 \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2k} & x_2 - q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nk} & x_n - q_n \end{pmatrix} = A \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & & w_k & \overrightarrow{PQ} \end{array} \end{array}$$

di tipo $n \times (k+1)$ ha rango k

Infatti: per costruzione, le prime k colonne sono LIN. INDIP., e noi richiediamo che la $(k+1)$-esima sia comb. lineare delle precedenti

$\Longleftrightarrow$ la matrice $\tilde{A}$ a scala ottenuta da A ha k righe non nulle

$\Longleftrightarrow$ le ultime $(n-k)$ righe sono nulle $\Longleftrightarrow$ le ultime $(n-k)$ espressioni lineari nelle x_i si annullano.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc} \circledast & * & * & \cdots & * & x_1 - q_1 \\ 0 & \circledast & \times & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \circledast & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \circledast & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & \vdots & \text{espressioni nelle } x_i \end{array}\right) \text{riga } k$$

i k pivot sono nelle prime k colonne

Quindi: ogni SSA di dim k ammette $n-k$ equazioni cartesiane.

COROLLARIO: In particolare, se $\dim S = n-1$ cioè S è un IPERPIANO AFFINE, S è dato da $n-(n-1) = 1$ eq. cartesiana.

$k = n-1$

Es. $n=2$: $\dim S = n-1 = 2-1 = 1$

$\Rightarrow$ rette del piano ammettono 1 eq. cartesi.

$n = 3$: $\dim S = n-1 = 3-1 = 2$, S piano affine in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, ammette 1 eq.

$n = 4$, $\dim S = 3$ ha 1 eq. cart.

Es. $n=3$, $\dim S = 1$ retta affine

S ammette $n-1 = 3-1 = 2$ eq. cartesiane

Inoltre: se S ha 1 eq. cartesiana, è iperpiano:

Lemma: S dato da $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$, allora $\dim S = n-1$, cioè è iperpiano.

Dim. $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ è SL di 1 eq. in n incognite.

$$(A|b) = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n | b)$$

$$\exists \, a_i \neq 0, \implies rg(a_1, a_2 \dots a_n) = rg\, A = 1$$
$$= rg(a_1 \dots a_n | b)$$

$\implies$ l'insieme delle soluzioni ha dim:

$$\dim S = n - rg\, A = n - 1$$

per il Teorema di mostedi.

Esempio: Rette nello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$k = \dim S = 1$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 3 + 2t \end{cases}$$

$Q = (1, 2, 3)$, $P = (x_1, x_2, x_3)$

$$W = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix}$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 \\ -1 & x_2 - 2 \\ 2 & x_3 - 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{matrix} II + I \\ \rightsquigarrow \\ III - 2 \cdot I \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 \\ 0 & x_2 - 2 + x_1 - 1 \\ 0 & x_3 - 3 - 2x_1 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & x_1-1 \\ 0 & x_1+x_2-3 \\ 0 & -2x_1+x_3-1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2-3=0 \\ -2x_1+x_3-1=0 \end{cases}$$

Esempio: piano S in $A^3_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{cases} x_1 = 1+t+0\cdot s \\ x_2 = 2+t+1\cdot s \\ x_3 = 3+t+0\cdot s \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2+t+s \\ x_3 = 3+t \end{cases}$$

$Q = (1,2,3)$

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1-1 \\ 1 & 1 & x_2-2 \\ 1 & 0 & x_3-3 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 2 \Longleftrightarrow \det A = 0$

con SARRUS

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x_1-1 \\ 1 & 1 & x_2-2 \\ 1 & 0 & x_3-3 \end{array}\right)\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$\det A = (x_3 - 3) - (x_1 - 1) = -x_1 + x_3 - 2$

$\Rightarrow$ eq. cart. è $\quad -x_1 + x_3 - 2 = 0$

$$-x_1 + x_3 = 2$$

OPPURE: $\det \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{0} & x_1 - 1 \\ 1 & \textcircled{1} & x_2 - 2 \\ 1 & 0 & x_3 - 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det A_{22}$

sviluppo con Laplace secondo la seconda colonna

$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 \\ 1 & x_3 - 3 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot (x_3 - 3) - 1 \cdot (x_1 - 1)$

$= x_3 - 3 - x_1 + 1$

$= -x_1 + x_3 - 2$

Infine: mettendo la matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 1 & 1 & x_2 - 2 \\ 1 & 0 & x_3 - 3 \end{pmatrix} \underset{III - I}{\overset{II - I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2 - x_1 + 1 \\ 0 & 0 & \boxed{x_3 - 3 - x_1 + 1} \end{pmatrix}$$

$$\text{rg} = 2 \iff -x_1 + x_3 - 2 = 0$$

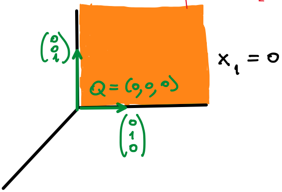
* * *

ALTRI ESEMPI:

Piani coordinati: in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

cons. i piani $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$

piano x_2x_3 piano x_1x_3 piano x_1x_2


$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$Q=(0,0,0)$
$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
$x_1=0$

- $x_1=0$ SL $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$

$a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $b=0$

per trovare eq. parametriche: risolvo il SL

oss. che x_2 e x_3 sono incognite libere

pongo: $x_3=t$, $x_2=s$, $x_1=0$

$\Rightarrow$ gen. soluzione è $\begin{pmatrix}0\\s\\t\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ eq. parametriche: $\begin{cases}x_1=0\\x_2=s\\x_3=t\end{cases}$

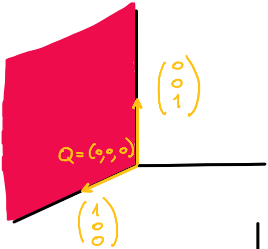
$$Q=(0,0,0)$$

$$W=\text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\text{Span}(e_3,e_2)$$

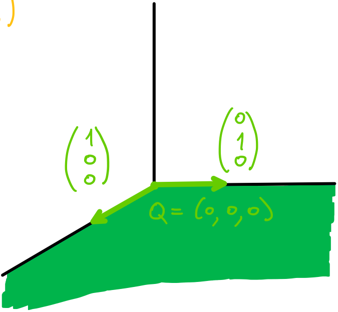
Analog.: $x_2 = 0$, eq. par. $\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$x_2 = 0$



Infine: $x_3 = 0$



Le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$Q = (0,0,0)$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$