Lezione 12 novembre 2021

venerdì 12 novembre 2021 11:19

$\mathbb{A}$ sp. aff. su V

$S \subseteq \mathbb{A}$ SSA è il dato di:

- $Q \in \mathbb{A}$ un punto
- $W \subseteq V$ SSV GIACITURA di S

$\dim S := \dim W$

Esempio: Sia $Q \in \mathbb{A}$, e sia $W = \{0\}$ SSV nullo

chi è S passante per Q e parallelo a W?

$$S = \{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} \in W\}, \quad W = \{0\}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{QP} \in \{0\}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{QP} = 0 \underset{\text{(esercizio)}}{\Longleftrightarrow} P = Q$$

$$\dot{Q} = P$$

$$= \{Q\}$$

$$\dim S = \dim W = 0$$

Esempio: rette spaziali:

cons. $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \quad (= \mathbb{R}^3)$

- $Q \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}, \quad Q = (q_1, q_2, q_3)$
- $W \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \dim W = 1 = \dim S$

$W = \operatorname{Span}(w)$ con $w \neq 0$

$w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$;

$$S = \{P \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} : \overrightarrow{QP} \in W\}$$

$$= \left\{(x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ x_3 - q_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ x_3 - q_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x_1 - q_1 = a_1 \cdot t \\ x_2 - q_2 = a_2 \cdot t \\ x_3 - q_3 = a_3 \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + a_1 \cdot t \\ x_2 = q_2 + a_2 \cdot t \\ x_3 = q_3 + a_3 \cdot t \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAM. della retta affine S

t è un parametro che varia in $\mathbb{R}$.
Al variare di t, trovo tutti i punti di S.

OSS. Non c'è un unico modo di dare equazioni parametriche per S, ce ne sono infiniti:

infatti: $Q \in S$ può essere scelto liberamente (infinite scelte)

$w \in W$, $w \neq 0$: ho infinite scelte.

Con scelte diverse, troviamo equazioni parametriche diverse; però la retta non cambia:

$$S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$$

Infatti: sia S retta passante per Q e parallela a $W = \mathrm{Span}(w)$

esista $R \in S$ un punto $R \neq Q$

$R = (r_1, r_2, r_3)$: $\exists$ uno specifico valore $t_R \in \mathbb{R}$ di t per cui si ha:

$$(*) \quad \begin{cases} r_1 = q_1 + a_1 t_R \\ r_2 = q_2 + a_2 t_R \\ r_3 = q_3 + a_3 t_R \end{cases}$$

Eq. parametriche di S con R, w:

$$\begin{cases} x_1 = r_1 + a_1 \cdot \tau \\ x_2 = r_2 + a_2 \cdot \tau \\ x_3 = r_3 + a_3 \cdot \tau \end{cases} \quad , \ \tau \in \mathbb{R}$$

tau parametro

ovvero usando $(*)$:

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + a_1 t_R + a_1 \tau \\ x_2 = q_2 + a_2 \cdot t_R + a_2 \tau \\ x_3 = q_3 + a_3 t_R + a_3 \tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + a_1(t_R + \varepsilon) \\ x_2 = q_2 + a_2(t_R + \varepsilon) \\ x_3 = q_3 + a_3(t_R + \varepsilon) \end{cases}$$

Quindi: Un punto $M = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{A}^3$ soddisfa

☼ $\Longrightarrow$ $\exists\, t_M \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{cases} m_1 = q_1 + a_1 t_M \\ m_2 = q_2 + a_2 t_M \\ m_3 = q_3 + a_3 t_M \end{cases}$

$\Longrightarrow$ M soddisfa anche $\circledast$ con $\varepsilon_M = t_M - t_R$

Viceversa: se M soddisfa $\circledast$ $\Longrightarrow$ $\exists\, \varepsilon_M$ t.c. $\begin{cases} m_1 = q_1 + a_1(t_R + \varepsilon_M) \\ m_2 = q_2 + a_2(t_R + \varepsilon_M) \\ m_3 = q_3 + a_3(t_R + \varepsilon_M) \end{cases}$

$\Longrightarrow$ ponendo $t_M := t_R + \varepsilon_M$, M soddisfa anche ✿.

Esempio: S : $Q = (1, 2, 3)$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

✿ $\begin{cases} x_1 = 1 - 1\cdot t \\ x_2 = 2 + 2\cdot t \\ x_3 = 3 - 3\cdot t \end{cases}$ per $t=0$, sono in $(1, 2, 3)$

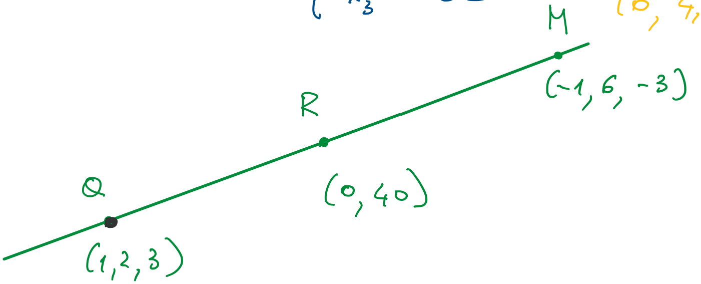
$R \in S$, ad esempio per $t=1$:

$R = (r_1, r_2, r_3) = (0, 4, 0)$

altre eq. parametriche:

$$\circledast \begin{cases} x_1 = 0 - 1 \cdot \varepsilon \\ x_2 = 4 + 2 \cdot \varepsilon \\ x_3 = 0 - 3 \cdot \varepsilon \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1 = -\varepsilon \\ x_2 = 4 + 2\varepsilon \\ x_3 = -3\varepsilon \end{cases}$$

per $\varepsilon = 0$ sono in $(0, 4, 0)$



Cons. il punto di $\circledast$ al tempo $\varepsilon = 1$:
$M = (-1, 6, -3)$

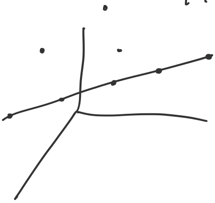
$\exists\ t_M$ t.c. le coordinate di T verificano

$$\begin{cases} -1 = 1 - t_M \\ 6 = 2 + 2t_M \\ -3 = 3 - 3t_M \end{cases} \qquad \begin{aligned} & t_M = 2 \\ & 2t_M = 4, \quad t = 2 \\ & 3t_M = 3+3 = 6, \quad t = 2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ M soddisfa ✿ con $t_M = 2$ e soddisfa $\circledast$ con $\varepsilon_M = 1$

OSS. : i punti che $\notin S$ sono quelli per cui $\nexists\ t$ t.c. le coordinate verifichino le eq. parametriche; ad es.

$(3,0,6)$: $\begin{cases} x_1 = 1 - t = 3 & \Rightarrow t = -2 \\ x_2 = 2 + 2t = 0 & \Rightarrow t = -1 \\ x_3 = 3 - 3t = 6 & \Rightarrow t = -1 \end{cases}$



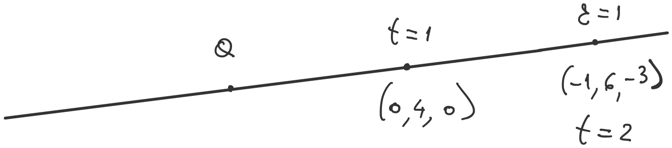
$\Rightarrow$ il punto $(3,0,6)$ non appartiene alla retta.

Possiamo scegliere un vettore w' diverso da w; ma sempre t.c. $W = \text{Span}(w') = \text{Span}(w)$

se $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, sia $w' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$Q = (1,2,3)$

$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 2 + 2t \\ x_3 = 3 - 3t \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x_1 = 1 - 2\varepsilon \\ x_2 = 2 + 4\varepsilon \\ x_3 = 3 - 6\varepsilon \end{cases}$



$t = -1$: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 6 \end{cases}$ $\qquad$ $\varepsilon = -1$ $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 9 \end{cases}$

$t = -2$: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 9 \end{cases}$

In generale: $W = \mathrm{Span}(w) = \mathrm{Span}(c \cdot w)$, $c \neq 0$

$$w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad cw = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + a_1 t \\ x_2 = q_2 + a_2 t \\ x_3 = q_3 + a_3 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = q_1 + c a_1 \tilde{t} = q_1 + a_1 (c\tilde{t}) \\ x_2 = q_2 + c a_2 \tilde{t} = q_2 + a_2 (c\tilde{t}) \\ x_3 = q_3 + c a_3 \tilde{t} = q_3 + a_3 (c\tilde{t}) \end{cases}$$

* * *

EQUAZIONI PARAMETRICHE di un sottospazio affine di dimensione k:

$\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$

S passante per $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

con W giacitura, $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2, \dots, w_k)$

con $\{w_1, \dots, w_k\}$ base di W, $w_i = \begin{pmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \\ \vdots \\ w_{ni} \end{pmatrix}$

$$S = \{P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} : \overrightarrow{QP} \in W\}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{QP} = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_k w_k$$

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - q_1 = w_{11} t_1 + w_{12} t_2 + \dots + w_{1k} t_k \\ \vdots \\ x_n - q_n = w_{n1} t_1 + w_{n2} t_2 + \dots + w_{nk} t_k \end{cases}$$

EQ. PAR. DI S nei parametri $t_1, \dots, t_k$