Lezione 22 novembre 2021

lunedì 22 novembre 2021 14:52

RETTE PIANE AFFINI

Visto: condizioni di // e incidenza per rette in forma parametrica

COND. DI PARALL. e INCIDENZA per rette con eq. cartesiana

$r \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, $r' \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$r: ax+by=c$ $\qquad r': a'x+b'y=c'$

$W_r: ax+by=0$ $\qquad W_{r'}: a'x+b'y=0$

Supp. $r \parallel r'$: visto la def. di //

è: $W_r = W_{r'}$

Per ricavare la condizione sui coeff. delle eq., cons. il SLO:

$$\circledast \begin{cases} ax+by=0 & : W_r \text{ è l'insieme delle soluzioni} \\ a'x+b'y=0 & : W_{r'} \text{ l'insieme delle soluzioni} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluz W di $\circledast$ è dato da $W_r \cap W_{r'} = W$

Oss. che $W_r = W_{r'} \iff$ la dim del SSV W delle soluz. di $\circledast$ è 1

Per il Teo. di Dimensione si ha

$$\dim W = n - \operatorname{rg} A = 2 - \operatorname{rg} A = 1$$

dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rg} A = 2-1 = 1$$

Ricordo: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$ rango per righe

Quindi $\operatorname{rg} A = 1 \iff$ le righe sono LIN. DIPENDENTI, quindi sono PROPORZ.

CRITERIO: $\det A = 0$, cioè: $ab' - a'b = 0$

Esempio: $r: 2x - y = 3$ $\quad r': 4x - 2y = 7$

$$W_r: 2x - y = 0 \qquad W_{r'}: \underset{}{\overset{2(2x-y)=0}{4x - 2y = 0}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rg} A = 1$$

$\Rightarrow W_r = W_{r'}$

Vediamo ora quando r e r' sono // "vere" e quando sono coincidenti:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \text{supp. } \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

Cons. la matrice completa $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$

abbiamo 2 possibilità: $\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) =$

- $1 \xRightarrow{RC}$ il SL è compatibile e la gen. sol. dipende da $2-1=1$ parametro
- $2 \xRightarrow{RC}$ il SL è INCOMPATIBILE

$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) = 1 \iff$ le righe sono PROPORZIONALI

in questo caso: $r = r'$

se $\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) = 2$: $r \parallel r'$, $r \neq r'$

Es: $2x - y = 3 \qquad 4x - 2y = 7$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{array}\right)$ le 2 righe NON sono proporzionali

$\Rightarrow \quad r \,/\!/\, r' \quad$ e $\quad r \neq r'$

In forma esplicita $\quad y = 2x - 3 \quad , \quad y = 2x - \frac{7}{2}$

Supp. ora che $r \nparallel r'$:

$r: \; ax + by = c \qquad r': \; a'x + b'y = c'$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

con $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2$

cioè $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ è invertibile, e per il Teo di Cramer, il SL è comp. e ha 1! soluzione

$$P = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

$P = (p_1, p_2)$, posso usare Formula di Cramer

$$p_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{cb' - bc'}{ab' - a'b}$$

$$p_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{ac' - ca'}{ab' - a'b}$$

FASCI DI RETTE PIANE:

Cons. r e r' con eq. cartesiane:

$r: \; ax + by = c \qquad r': \; a'x + b'y = c'$

$ax + by - c = 0 \qquad a'x + b'y - c' = 0$

e cons. la FAMIGLIA di rette:

$$\alpha(ax+by-c) + \beta(a'x+b'y-c') = 0$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ (oppure in $\mathbb{K}$)

$$(\alpha a+\beta a')x + (\alpha b+\beta b')y - (\alpha c+\beta c') = 0$$

si chiama FASCIO di RETTE generato da r e r'. (supp. $r \neq r'$)

Si possono presentare 2 casi:

$r \parallel r'$ ⇒ tutte le rette del fascio sono parallele a r ⇒ FASCIO IMPROPRIO

oppure $r \not\parallel r'$, e $r \cap r' = \{P\}$

⇒ tutte le rette del fascio passano per P

FASCIO PROPRIO

$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ le 2 righe sono prop.

$a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ per un opportuno $k \in \mathbb{R}$

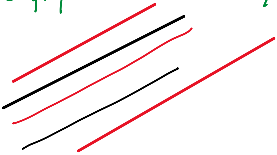
$$\alpha(ax+by-c) + \beta(a'x+b'y-c') =$$

$$= \alpha(ax+by-c) + \beta(kax+kby-c') = 0$$

$$= (\alpha+\beta k)ax + (\alpha+\beta k)by - (\alpha c+\beta c') = 0$$

giacitura: $(\alpha+\beta k)ax + (\alpha+\beta k)by = 0$

vedo che è prop. a $ax+by=0$: giac. di r



Esercizio: Ogni retta parallela ad r è una retta del fascio.

- Supp. $r \not\parallel r'$; e sia $\{P\} = r \cap r'$

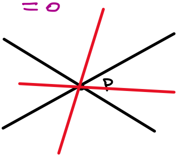
$P = (p_1, p_2)$ verifica

$$ap_1 + bp_2 - c = 0 \quad e \quad a'p_1 + b'p_2 - c' = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(ax+by-c) + \beta(a'x+b'y-c') = 0$$

e la valuto in $x = p_1$ e $y = p_2$:

$$\alpha(\underbrace{ap_1+bp_2-c}_{=0}) + \beta(\underbrace{a'p_1+b'p_2-c'}_{=0}) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$



$\Rightarrow$ ogni retta del fascio passa per P.

Esercizio: Ogni retta passante per P appartiene a questo fascio.

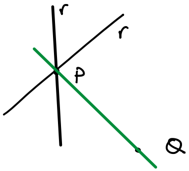
Possibile utilizzo dei fasci :

Cons. il seguente problema:

trovare eq. cartesiana della retta passante per

$P = r \cap r'$ dove $r : x - y = 3$

$r' : x + 2y = 5$



e per il punto $Q = (0, 1)$

La retta cercata appartiene al fascio

$$\boxed{\alpha(x - y - 3) + \beta(x + 2y - 5) = 0}$$ tutte le rette per P

basta imporre passaggio per Q:

$$\alpha \cdot (0 - 1 - 3) + \beta(0 + 2 \cdot 1 - 5) = 0$$

$$-4\alpha - 3\beta = 0 \quad (**)$$

una soluzione è: $\alpha = 3$ e $\beta = -4$

$$\Rightarrow \quad 3(x - y - 3) + (-4) \cdot (x + 2y - 5) = 0$$

$$3x - 3y - 9 - 4x - 8y + 20 = 0$$

$$-x - 11y = -11$$

in generale: $\beta = -\frac{4}{3}\alpha$

$$\alpha(x - y - 3) + \left(-\frac{4}{3}\alpha\right)(x + 2y - 5) = 0$$

$$\alpha\left((x - y - 3) - \frac{4}{3}(x + 2y - 5)\right) = 0 \quad / \cdot 3$$

$$\alpha\,\big(3(x-y-3)-4\,(x+2y-5)\big)=0$$

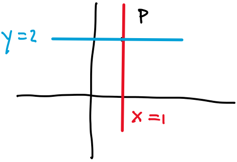
Altro esempio :

Retta per 2 punti: $P=(1,2)$, $Q=(3,4)$

Posso cons. la gen. retta per P : fascio per P:

generato da r: $x=1$ e r': $y=2$

$x-1=0$ $\quad$ $y-2=0$



$$\alpha(x-1)+\beta(y-2)=0$$

impongo pass. per $Q=(3,4)$

$$\alpha(3-1)+\beta(4-2)=0$$

$2\alpha+2\beta=0$, $\quad\alpha+\beta=0$,

ad es. $\alpha=1$, $\beta=-1$

$$1\cdot(x-1)-1\cdot(y-2)=0$$

$x-y+1=0$, $\quad x-y=-1$

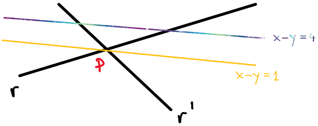
Altro esempio: Trovare la retta

- passante per $P=r\cap r'$, $\quad r:\ x+3y=1$

$r':\ 2x-8y=2$

$x-4y=1$

- parallela a $x-y=4$



Gen. rette per P:

$$\alpha(x+3y-1)+\beta(x-4y-1)=0$$

$$(\alpha+\beta)x+(3\alpha-4\beta)y-\alpha-\beta=0$$

impongo parall. a $x-y=4$

$$\det\begin{pmatrix}\alpha+\beta & 3\alpha-4\beta \\ 1 & -1\end{pmatrix}=0$$

$$(-1)\cdot(\alpha+\beta)-(3\alpha-4\beta)\cdot 1=0$$

$$-\alpha-\beta-3\alpha+4\beta=0$$

$$3\beta-4\alpha=0$$

$$\beta=4, \qquad \alpha=3$$

$$\Rightarrow \qquad 7x-7y-7=0$$

$$x-y=1$$