Lezione 26 novembre 2021

venerdì 26 novembre 2021 11:17

RETTE NELLO SPAZIO

Posizioni reciproche di 2 rette in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

e CRITERI :

EQ. CARTESIANE :

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \qquad s: \begin{cases} a''x+b''y+c''z=d'' \\ a'''x+b'''y+c'''z=d''' \end{cases}$$

Ins. delle soluz. è una retta affine, quindi: il SL è compatibile, inoltre

$S=r$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix} = 2$$

$\dim S = 1 = n - \text{rg}\,A = 3 - \text{rg}\,A$

$\Rightarrow \text{rg}\,A = \text{rg}\,(A|b) = 2$

W_r: è il SSV delle soluz. di $\qquad W_s$:

$$\textcircled{*}\ \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases} \qquad \textcircled{**}\ \begin{cases} a''x+b''y+c''z=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z=0 \end{cases}$$

$\dim W_r = 1 \qquad \dim W_s = 1$

OSS. che $\dim W_r \cap W_s \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$$r \parallel s \iff W_r = W_s \iff \dim W_r \cap W_s = 1$$

Inoltre $W_r \cap W_s$ è formato dai vettori che soddisfano sia $\textcircled{*}$ sia $\textcircled{**}$, quindi $W_r \cap W_s$ è l'insieme delle soluzioni di SLO:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z=0 \end{cases}$$

Per la Formula di dimensione

$$\dim(W_r \cap W_s) = n - rg \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \hline a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{array}\right) \begin{array}{l} rg\ 2 \\ \\ rg\ 2 \\ \\ \end{array}$$

$$= 3 - rg(\cdot)$$

$$r /\!/ s \Longleftrightarrow \; = 1$$

$$\Longrightarrow rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ & \vdots & \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow r /\!/ s \Longleftrightarrow rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2$$

Per capire quando $r /\!/ s$ e $r \neq s$ opp. $r = s$ vediamo come si intersecano, oss. che $r \cap s$ (se $\neq \emptyset$) sono le soluzioni del SL

$$(\star) \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ & \vdots & \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}, \quad rg = 2$$

$$2 \leq rg \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}}_{= C} \leq 3$$

Quindi: per RC:

se $rg\, C = rg\, A = 2$

$\rightarrow (\star)$ è compatibile

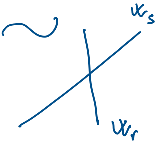
$$\dim(r \cap s) = n - rg A = 3 - 2 = 1$$

$$\Longrightarrow r = s.$$

Se $\text{rg}\, C = 3 \Longrightarrow \circledast$ NON è compatibile

$$\Longrightarrow r \cap s = \emptyset \Longrightarrow r \neq s$$

* * *



Supp. ora $r \nparallel s \iff W_r \neq W_s$

$\iff \dim W_r \cap W_s = 0$

$W_r \cap W_s$ è il SSV delle soluzioni di

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z=0 \end{cases}$$

$\text{rg}\, A = 3$, $\dim W_r \cap W_s = n - \text{rg}\, A = 3-3=0.$

Vediamo ora le possibilità per $r \cap s$:

devo il SL completo:

$$\circledast \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \\ a'''x+b'''y+c'''z=d''' \end{cases}$$

$\text{rg}\, A = 3$

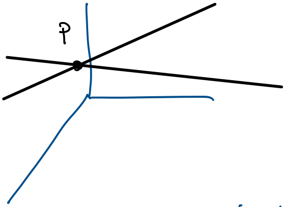
$\text{rg}\, C \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$

RC: Se $\text{rg}\, C = 3 \Longrightarrow \circledast$ è compatibile

$r \cap s \neq \emptyset$

$\dim r \cap s = n - \text{rg}\, A = 3-3 = 0$

$\Longrightarrow \quad r \cap s = \{P\}$



Se $rg\, C = 4 \Longrightarrow (\ast)$ non è compatibile

$\Longrightarrow r \cap s = \emptyset$

Quindi: r e s NON sono né parallele né incidenti $\Longrightarrow$ r e s sono SGHEMBE

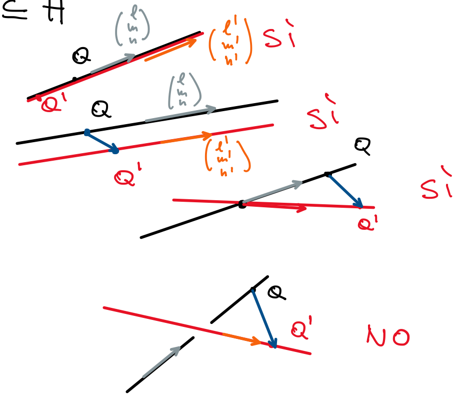
~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~

COMPLANARITÀ DI RETTE in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

Def.: Due rette r, r' sono COMPLANARI se $\exists\, H$ piano t.c.

$$r \subseteq H, \quad r' \subseteq H$$

r e r'
- coincidenti
- parallele "vere"
- incidenti
- sghembe


Q
Q'
$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$ sì
Q
$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$
sì
$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$
Q'
Q
sì
Q'
Q
Q'
NO

CRITERIO DI COMPLANARITÀ:

$$r:\begin{cases} x = \varrho_1 + l t \\ y = \varrho_2 + m t \\ z = \varrho_3 + n t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = \varrho_1' + l' \varepsilon \\ y = \varrho_2' + m' \varepsilon \\ z = \varrho_3' + n' \varepsilon \end{cases}$$

r e r' sono complanari $\Longleftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} l & l' & \varrho_1' - \varrho_1 \\ m & m' & \varrho_2' - \varrho_2 \\ n & n' & \varrho_3' - \varrho_3 \end{pmatrix} = 0$$

r e r' sono sghembe $\Longleftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} l & l' & \varrho_1' - \varrho_1 \\ m & m' & \varrho_2' - \varrho_2 \\ n & n' & \varrho_3' - \varrho_3 \end{pmatrix} \neq 0$$