Visto: un piano $\Pi \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è def. da

1 eq. cartesiana : $ax+by+cz+d=0$

$\Rightarrow$ possiamo cons. FASCIO DI PIANI

Def: Dati 2 piani Π, $\Pi' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con $\Pi \neq \Pi'$,

con eq. cartes.

Π : $ax+by+cz+d=0$

Π' : $a'x+b'y+c'z+d'=0$

Il FASCIO DI PIANI generato da Π e Π'
è la famiglia di piani, il cui generico elemento
ha eq.

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$
$$\alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}$$

OSS.: Si possono verificare 2 casi:

- $\Pi \parallel \Pi'$: il fascio si chiama IMPROPRIO
  $\Rightarrow$ ogni piano del fascio è parallelo a Π
- $\Pi \not\parallel \Pi'$ e quindi $\Pi \cap \Pi' = $ retta r
  il fascio PROPRIO
  $\Rightarrow$ ogni piano del fascio contiene r

Infatti: se $\Pi \not\parallel \Pi'$, allora $(a:b:c) \neq (a':b':c')$ cioè
proporzionali ai $(a:b:c)$;
$\exists\ k: a'=ka,\ b'=kb,\ c'=kc$

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(kax+kby+kcz+d')=0$$
$$(\alpha+k\beta)ax+(\alpha+k\beta)by+(\alpha+k\beta)cz+\alpha d+\beta d'=0$$

eg. equivalente a: $ax+by+cz+\frac{\alpha d+\beta d'}{\alpha+k\beta}=0$

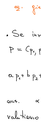
- Se invece $\Pi \cap \Pi' = $ retta r $\Rightarrow \forall P \in r$,
  $P=(r_1,r_2,r_3)$ soddisfa:

$$ar_1+br_2+cr_3+d=0 \qquad a'r_1+b'r_2+c'r_3+d'=0$$

con $\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$
valutiamo in (r_1,r_2,r_3):

$$\alpha\underbrace{(ar_1+br_2+cr_3+d)}_{=0}+\beta\underbrace{(a'r_1+b'r_2+c'r_3+d')}_{=0}$$
$$\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

Es: Piano per $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$



$$\begin{cases} a+0+0+d=0 \\ 0+1+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=d \\ b=d \\ c=d \end{cases} \qquad a+b+c+d=1$$

ad es. $x+y+z=1$

RETTE NELLO SPAZIO $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $\dim r = 1$: $Q \in r$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$

e $W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\right)$, $\dim W_r = 1$

EQ. PARAM. :
$$\begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \\ z = q_3 + nt \end{cases}$$

PASS. A EQ. CARTES.:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} l & x-q_1 \\ m & y-q_2 \\ n & z-q_3 \end{pmatrix} = 1$$

Nella matrice escalo, e impongo che
si annullino la 2ª e la 3ª eqn. (se $l \neq 0$)

Es.
$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = 5+2t \\ z = 7+3t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x-3 \\ 2 & y-5 \\ 3 & z-7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & x-3 \\ 0 & y-5-2x+6 \\ 0 & z-7-3x+9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & x-3 \\ 0 & -2x+y+1 \\ 0 & -3x+z+2 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{cases} -2x+y+1=0 \\ -3x+z+2=0 \end{cases}$$

La retta è espressa come intersezione di 2 piani.

Vicevers.: Se $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è data da sistema:

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

per trovare eq. parametriche basta risolvere il
sist e cavare le sue soluzioni.

Es.: r : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$: parallela a $z=0$ piano π_2
: $y=0$ piano $x=0$

Per trovare eq. parametriche
qua sotto.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$z=t$, $x=1$, $y=2$: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$

$Q=(1,2,0)$, $W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Altre eq cartesiane per r :

Fascio di piani per r: $\alpha(x-1)+\beta(y-2)=0$

ad es. $\alpha=1$ $x-1+y-2=0$ $x+y=3$
$\beta=1$

un altro piano $\alpha=1$: $x-1+2y-4=0$
$\beta=2$ $x+2y=5$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$

è sempre la stessa retta!

Jem risolvere il sist: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{II}-\text{I}}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \end{cases}$

$z=t$, $y=2$, $x=-y+3=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$$

OSS: Una retta $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ può anche essere
assegnata con 3 eq. cartesiane; in questo
caso i tre piani corrispondenti appartengono a
uno stesso fascio

$$\alpha(x-1)+\beta(y-2)=0$$
$$x-1+6y-12=0$$

Es.: $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \\ x+6y=13 \end{cases}$

portiamo eq. parametriche risolvo il sist:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}-5\,\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \end{cases}$$

RETTE PER 2 PUNTI

$P, Q \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$: $P \neq Q$

$\Rightarrow \exists!\ r$ t.c. per P e Q ci

Fisso Q, giacche $W_r = \mathrm{Span}(\overrightarrow{QP})$

$P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = q_1 + (p_1-q_1)t \\ y = q_2 + (p_2-q_2)t \\ z = q_3 + (p_3-q_3)t \end{cases}$$