Lezione 30 novembre 2021

martedì 30 novembre 2021 11:14

Ieri: visto $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ moltiplicazione per $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

L_A risulta additiva e omogenea, e sono il punto di partenza per la teoria delle

APPLICAZIONI LINEARI TRA SPAZI VETTORIALI

Def.: Una applicazione $f : V \to V'$, dove V e V' sono SPAZI VETTORIALI su un campo K, si dice **APPLICAZIONE LINEARE** se verifica:

(AL1) f è **ADDITIVA**:

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

(AL2) f è **OMOGENEA**

$$\forall v \in V, \ \forall c \in \mathbb{K} : \ f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$$

Oss.: ① $f : V \to V'$ lineare; allora

$$f(0_V) = 0_{V'}$$

0_V = vettore nullo di V, $0_{V'}$ = vettore nullo di V'

Infatti: $0_V = 0 \cdot v$, $0 \in \mathbb{K}$ scalare nullo, $v \in V$ vettore qualunque

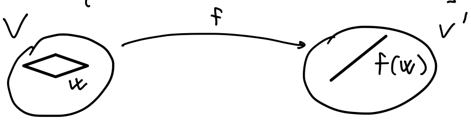
OMEGENEITÀ DI f $\Rightarrow$ $f(0_V) = f(0 \cdot v) = \underset{\substack{\| \\ 0_{V'}}}{0 \cdot f(v)}$

② f lineare $\Rightarrow$ f manda SSV di V in SSV di V'

Infatti: sia $W \subseteq V$ SSV, e cons.

$f(W)$ = immagine di W tramite f

$\overset{!}{=} \{ v' \in V' : \exists\, w \in W \text{ t.c. } f(w) = v' \}$



affermo che $f(W) \subseteq V'$ è ssv di V'.

Devo verificare che $f(W)$ soddisf gli assiomi di SSV : $\boxed{\text{SSV1}}$ (chiuso rispetto somma)

$\boxed{\text{SSV2}}$ (chiuso rispetto molt. per scalare)

$\boxed{\text{SSV1}}$: Siano $z_1, z_2 \in f(W)$

$\Rightarrow \exists\, w_1 \in W \; : \; f(w_1) = z_1$

$\exists\, w_2 \in W \; : \; f(w_2) = z_2$

Allora : $z_1 + z_2 = f(w_1) + f(w_2) \underset{\boxed{AL1}}{=} f(\underbrace{w_1 + w_2}_{\in W})$

perché W è SSV

$\Rightarrow$ anche $z_1 + z_2$ è immagine tramite f di un vettore di W (precis. il vett. $w_1 + w_2$)

$\boxed{\text{SSV2}}$ Sia $z \in f(W)$, e sia $c \in \mathbb{K}$ qualunque

$\Downarrow$

$\exists\, w \in W : f(w) = z$

Quindi: $c \cdot z = c \cdot f(w) \underset{\boxed{AL2}}{=} f(\underbrace{c \cdot w}_{\in W})$

perché W è SSV

$\Rightarrow$ $c \cdot z$ è immagine di un vettore di W (e precisamente $c \cdot w$).

③ In particolare, sia $W = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$

Allora: $W' = f(W) = \text{Span}(f(w_1), \dots, f(w_k))$

Infatti: Sia $z \in f(W)$, devo dimostrare che z è combinazione lineare di $f(w_1), \dots, f(w_k)$.

$$z \in f(W) \Rightarrow \exists\, w \in W : z = f(w)$$

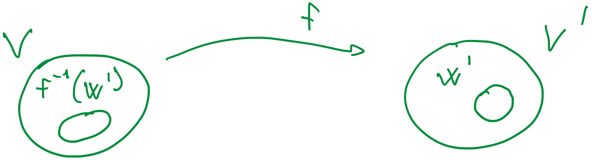
$W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$, quindi $w = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$

$$z = f(w) = f(c_1 w_1 + \dots + c_k w_k) \underset{\boxed{AL1}}{=} f(c_1 w_1) + \dots + f(c_k w_k)$$

$$\overset{\boxed{AL2}}{=} c_1 \cdot f(w_1) + \dots + c_k \cdot f(w_k)$$

ATTENZIONE: In generale, **NON È VERO** che una BASE di W è mandata in BASE di $W' = f(W)$

④



Sia $W' \subseteq V'$ un SSV. Allora la CONTROIMMAGINE DI W' tramite f:

$$W := f^{-1}(W') = \{ w \in V : \exists\, w' \in W' \text{ t.c. } f(w) = w' \}$$

è ancora SSV di V.

Verifica: omessa (facoltativo: esercizio)

CONSEGUENZE:

Def.: $W = V$, $\underset{= \mathrm{Im}(f)}{f(V)} \subseteq V'$ è SSV di V' che si chiama SOTTOSPAZIO IMMAGINE

e $\dim f(V) = \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}\, f$

si chiama RANGO di f.

Def.: $W' = \{0_{V'}\} \subseteq V'$ sottospazio nullo

$f^{-1}(\{0_{V'}\}) =: \ker f$ si chiama

NUCLEO DI f o NULLITÀ DI f

$$\ker f = \{ w \in V : f(w) = 0_{V'} \} \ni 0_V$$

* * *

Esempi di AL:

① L_A sono AL

ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2 × 2

$$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

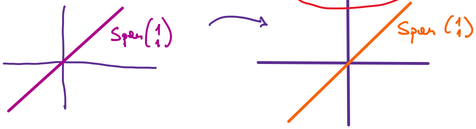
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

cons. $W \subseteq \mathbb{R}^2$, W retta vettoriale

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overset{!}{=} \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_A(W) = \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \right\}$$


Span$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
Span$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} c + 2c \\ 3c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3c \\ 3c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\overset{!}{=} \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Sie $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$

$$\overset{!}{=} \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

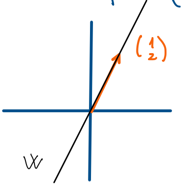
$$L_A(W) = \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

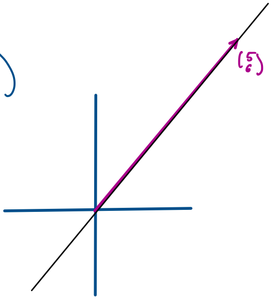
$$\overset{!}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c + 4c \\ 6c \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{!}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 5c \\ 6c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \overset{\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5c \\ 6c \end{pmatrix}}$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$





$$\ker L_A = ?$$

$$\ker L_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$L_A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2\\3x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

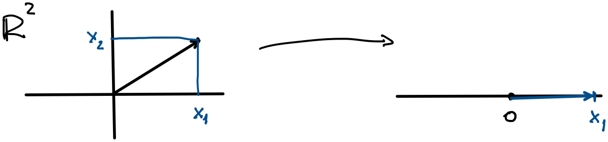
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x_1+2x_2=0\\3x_2=0\end{cases}$$ è un SLO

$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ ha rg $=2$ $\Longrightarrow$ il SLO ha solo la soluzione nulla : $\ker L_A = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

② : $p:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1$$

PROIEZIONE SULLA PRIMA COMPONENTE



Affermo: p è AL:

AL1 : $p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right) = p\left(\begin{pmatrix}x_1+w_1\\x_2+w_2\end{pmatrix}\right) = x_1+w_1$

$= \; p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)+p\left(\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right) = x_1+w_1$

AL2 : $p\left(c\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = p\left(\begin{pmatrix}c\,x_1\\c\,x_2\end{pmatrix}\right) = c\,x_1$

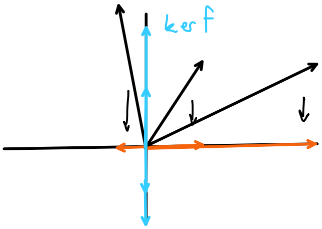
$= \; c\cdot p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = c\cdot x_1$

$$\ker p = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=0\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : x_1=0\right\}$$

$$\overset{!}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una retta vettoriale



Inoltre: $\mathbb{R}^2 = \text{Span}(e_1, e_2) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

abbiamo visto che $p(\mathbb{R}^2) = \text{Span}(p(e_1), p(e_2))$

$$\text{Im}\, p = p(\mathbb{R}^2) = \text{Span}(1, 0) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\overset{!}{=} \text{Span}(1) = \mathbb{R}$$

③ $f : V \longrightarrow V'$ AL e supp. che f sia COSTANTE $\quad f(v) = \bar{v}' \in V' \quad \forall v \in V$

siccome deve valere $f(0_V) = 0_{V'}$

$\Rightarrow \bar{v}' = 0_{V'}$ vettore nullo e

f si dice APP. NULLA

(tutti i vettori di V sono mandati nel vettore nullo)

④

$$\begin{array}{ccc} D : \mathcal{C}^1((a,b), \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0((a,b), \mathbb{R}) \\ \cup\!\!\!\mid & & \\ f & \longrightarrow & D(f) = f' \end{array}$$

è una AL:

$$D(f + \varphi) = (f + \varphi)' = f' + \varphi' = D(f) + D(\varphi)$$

$$D(c \cdot f) = (c \cdot f)' = c \cdot f' = c \cdot D(f)$$