Lezione 29 novembre 2021

lunedì 29 novembre 2021 14:05

Geometria affine in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R}^4)$

$P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$

$Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \\ q_4 - p_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Fissiamo $O = (0,0,0,0)$ e base canonica di $\mathbb{R}^4$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Sottosp. affini di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$:

$\dim \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}} = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

$S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, $\dim S =$

- 0 : $S = \{Q\}$
- 1 S retta affine
- 2 S piano affine
- 3 S iperpiano affine
- 4 $S = \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$

OSS.: $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ si può identificare con lo SPAZIO-TEMPO della relatività ristretta di Einstein:

$P \in \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ $\quad P = (x, y, z, t)$
(x_1, x_2, x_3, x_4)

Possiamo pensare $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ come l'unione degli spazi di eq. $t = \text{cost.}$

$\boxed{t = k.}$ $\quad (x_4 = k)$

è l'eq. di un IPERPIANO

T : $\dim T = 3$, $T \sim \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

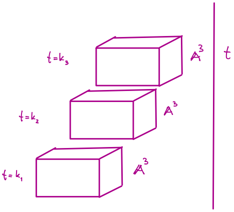
E osservo che: T_1: $t = k_1$ $\quad T_2$: $t = k_2$, $k_1 \neq k_2$

T_1 e T_2 sono PARALLELI:

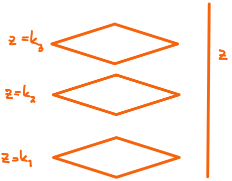
W_{T_1} : $t = 0$ $(x_4 = 0)$ $\qquad W_{T_2}$: $t = 0$ $(x_4 = 0)$

$\Rightarrow W_{T_1} = W_{T_2}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ si può pensare come un'unione di spazi 3-dimensionali T_i e paralleli tra loro:



Questa situazione è analoga al fatto che A^3_R può essere pensato come un'unione di piani 2-dimensionali H_i e paralleli tra loro:



Ripasso:

S retta affine in A^4_R : $\dim S = 1$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + l t \\ x_2 = q_2 + m t \\ x_3 = q_3 + n t \\ x_4 = q_4 + \sigma t \end{cases} \qquad \underset{\in \mathbb{R}^4}{\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \\ \sigma \end{pmatrix}} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S può essere data da **3 eq. cartesiane**

(RICORDO: se $S \subseteq A^n_R$, $\dim S = k \Rightarrow$
S ha $n-k$ eq. cartesiane)

eq. cartes.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} l & x_1 - q_1 \\ m & x_2 - q_2 \\ n & x_3 - q_3 \\ \sigma & x_4 - q_4 \end{pmatrix} = 1$$

- $\dim S = 2$, $S \subseteq A^4_R$

eq. parametriche per S : 2 parametri

eq. cartesiane per S : 2 eq. cartesiane

- $\dim S = 3$, $S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$

eq. param. per S : 3 parametri

eq. cartesiane per S : 1 eq. cartesiana

Vediamo alcune possibili configurazioni:

- Consideriamo 2 piani in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$:

$$H : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w = k_2 \end{cases}$$

$$H' : \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 w = k_3 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 w = k_4 \end{cases}$$

e sia $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$

e $C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & k_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & k_4 \end{array}\right)$

- $\mathrm{rg}\, A = 4$, $\mathrm{rg}\, C = 4$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo SLO corrispondono ai vettori di : $W_H \cap W_{H'}$

$\text{rg } 4 \Longrightarrow \dim W_H \cap W_{H'} = n - \text{rg} = 4-4 = 0$

$\text{rg } A = \text{rg } C = 4 \underset{\text{o Cramer}}{\xrightarrow{RC}} \dim S = n - \text{rg} = 4-4 = 0 \Longrightarrow$ $\dim H \cap H' = 0$ e quindi è un punto

- Consideriamo un piano e una retta in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$

$$H: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w = k_2 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 w = k_3 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 w = k_4 \\ a_5 x + b_5 y + c_5 z + d_5 w = k_5 \end{cases}$$

e sia

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & k_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & k_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & k_5 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } A = 3, \quad \text{rg } C = 4$

$\Downarrow$

$\dim W_H \cap W_r = n - \text{rg} A = 4 - 3 = 1$ retta vett.

$W_H \downarrow$ piano vettoriale

$W_r \to$ retta vettoriale

$\to W_r \subseteq W_H \Rightarrow r \parallel H$

$$\underbrace{W_H \cap W_r}_{\dim = 1} \subseteq \underbrace{W_r}_{\dim = 1} \Rightarrow W_H \cap W_r = W_r$$

$\text{rg}\, C = 4 \neq 3 = \text{rg} A \Rightarrow H \cap r = \emptyset$, cioè il piano e la retta sono paralleli "veri".

* * *

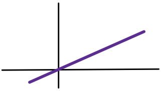
TORNIAMO AGLI SPAZI VETT.

e studiamo le loro TRASFORMAZIONI

Idea: Una tipologia di funzioni semplici

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sono le funz. del tipo

$f(x) = a \cdot x \qquad a \in \mathbb{R}$ costante



G_f sono rette vettoriali

Proprietà algebriche: $f(x'+x'') = a\cdot(x'+x'') = a x' + a x'' \overset{!}{=} f(x') + f(x'')$

ADDITIVITA'

$f(c \cdot x) = a \cdot (c x) = c \cdot (a x) = c \cdot f(x)$

$c \in \mathbb{R}$

OMOGENEITA'

Proviamo a definire delle funzioni analoghe

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ che abbiamo le 2 proprietà

Ad es. se considero $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$v \in \mathbb{R}^n \longrightarrow w = A \cdot v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{v}}_{m \times 1}$$

$$A \cdot (v_1 + v_2) = A \cdot v_1 + A \cdot v_2 \qquad \text{ADD.}$$

$$A \cdot (c \cdot v_1) = c \cdot (A v_1) \qquad \text{OMOG.}$$

Def.: Questa applicazione (la molt. per la matrice A) verrà indicata con

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m , \quad A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

L_A risulta additiva e omogenea