Lezione 7 dicembre 2021

martedì 7 dicembre 2021 11:07

Ieri: Teo. di Struttura AL:

data una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

e scelti in modo arbitrario

$w_1, \dots, w_n \in V'$ $\Longrightarrow$ $\exists!$ AL

$f : V \longrightarrow V'$ tale che

$$v_1 \longrightarrow f(v_1) = w_1$$
$$\vdots$$
$$v_n \longrightarrow f(v_n) = w_n$$

Esempio numerico:

$V = \mathbb{R}^2$, $V' = \mathbb{R}^3$

Base di $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

e come vettori arbitrari di $\mathbb{R}^3$

scelgo:

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; per il Teo. di Struttura AL

$\exists!$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Questa f è così definita:

sia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un generico vettore; si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e allora poniamo

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ x \\ x + 2y \end{pmatrix} = \overset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

ad esempio:

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 + 9 \\ 2 \\ 2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

In questo esempio abbiamo visto che f, espressa in coordinate, è di fatto una AL del tipo "moltiplicazione per una matrice".

Vediamo ora che questo è un fenomeno generale, ovvero che con una scelta di una base del dominio e di una base del codominio, TUTTE le AL possono essere scritte nella forma "moltiplicazione per una matrice".

MATRICI ASSOCIATE AD AL

Sia $f : V \longrightarrow V'$ AL

abbiamo già osservato che: se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V, e

$$\boxed{\begin{aligned} & v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \\ \Longrightarrow \ & f(v) = c_1 \cdot f(v_1) + c_2 \cdot f(v_2) + \dots + c_n f(v_n) \end{aligned}}$$

★

$\in V'$

$\Longrightarrow$ se in V' fisso una base $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ di V',

allora le COORDINATE di $f(v)$ nella $\mathcal{B}'$ si

possono calcolare se conosco le coordinate di
$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$

Più precisamente: se

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$
$$f(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

si ha : $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ = coordinate di $f(v)$ nella $\mathcal{B}'$ $=$ per la ★

$$= \overset{m \times 1}{\begin{pmatrix} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_n a_{1n} \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \dots + c_n a_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2} + \dots + c_n a_{mn} \end{pmatrix}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Quindi: Se fisso $\mathcal{B}$ base di V
fisso $\mathcal{B}'$ base di V'

Se $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v in $\mathcal{B}$

allora le coordinate $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ di $f(v)$ nella base $\mathcal{B}'$
si trovano moltiplicando la matrice A per la colonna delle coordinate di v nella base $\mathcal{B}$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

dove A è la matrice di tipo $\underset{\text{dim codominio}}{\underset{\downarrow}{m}} \times \overset{\text{dim dominio}}{\overset{\uparrow}{n}}$

le cui colonne sono date dalle COORDINATE
di $f(v_1), \dots, f(\ _n)$ nella base $\mathcal{B}'$.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} w_1 \\ \\ w_m \end{array} \\ \begin{array}{cc} f(v_1) & \quad f(v_n) \end{array} & \end{array}$$

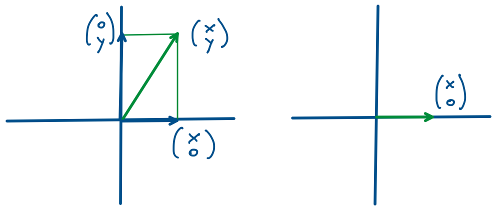
Def: $A =: M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ si chiama MATRICE ASSOCIATA a f NELLE BASI $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}'$ di V'.

Oss. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ DIPENDE dalla scelta di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (IN GENERALE, se cambio $\mathcal{B}$ opp. $\mathcal{B}'$, la matrice cambia)

Esempio: Cons. la proiezione

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

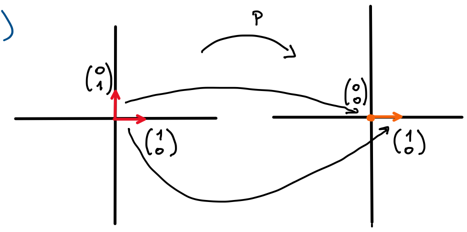
$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$ è una AL


$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

Matrice di p: nella base $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ fissata sia per $\mathbb{R}^2$ come dominio, sia per $\mathbb{R}^2$ come codominio

$$2 \times 2$$

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} p(e_1) & p(e_2) \end{array} & \end{array} \qquad p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$


p
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

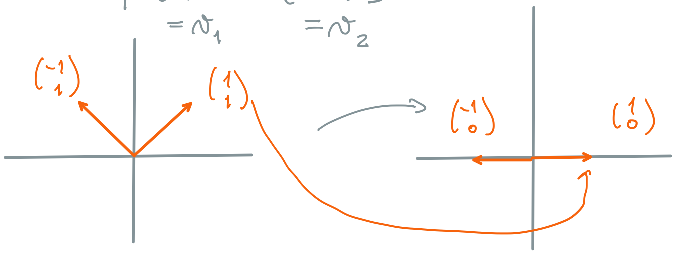
$$p(e_1) = p\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p(e_2) = p\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proviamo invece con la base

$$\mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_2} \Big\}$$


$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Chi è $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(p)$?

è la matrice le cui colonne sono le

coordinate di $p(v_1)$ e $p(v_2)$ nella base $\mathcal{B}$

$$p(v_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a_{11}\cdot v_1 + a_{21} v_2$$

$$\overset{!}{=} a_{11}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}-a_{21}\\a_{11}+a_{21}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} = 1 \\ a_{11} + a_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2a_{11} = 1 \Longrightarrow a_{11} = \frac{1}{2} \\ a_{21} = -a_{11} \Rightarrow a_{21} = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$p(v_2) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 = a_{12}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix}a_{12}-a_{22}\\a_{12}+a_{22}\end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} a_{12} - a_{22} = -1 \\ a_{12} + a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

UTILITÀ DI $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$:

PROP. Sia $f: V \to V'$, $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$
$\mathcal{B}'$ base di V', $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$

Allora:

$$\ker f = \left\{ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V : \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\iff f(v) = 0_{V'}} \right\}$$

$$= \left\{ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n : \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_n\end{pmatrix} \text{ è soluzione di } \underset{\text{SLO}}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)\cdot X = 0} \right\}$$

inoltre:

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m : M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix} \right\}$$

è un SL COMPATIBILE

Infine: $\mathrm{rg}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \dim \mathrm{Span}(\text{colonne})$

$\overset{!}{=} \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f$

OSS.: Cosa succede se parto da $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

e cons. $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sia $\mathcal{E}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

sia $\mathcal{E}'$ base canonica di $\mathbb{R}^m$

$$\boxed{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = A}$$

$$\begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{array}$$

$$\underset{L_A(e_1)}{\downarrow} \qquad \underset{L_A(e_n)}{\downarrow}$$

Infatti:

$$L_A(e_1) = A \cdot e_1 = \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$L_A(e_2) = A \cdot e_2 = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$L_A(e_n) = A \cdot e_n = A^{(n)}$$

Quindi: se partiamo da una matrice A e cons. la AL associata, $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, la matrice di L_A nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ COINCIDE con A.

ALTRE OSS.:

① Cons. f = AL nulla o banale

$f : V \longrightarrow V'$

$f(v) = 0_{V'} \quad \forall\, v \in V$

$\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B}'$ base di V'

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE NULLA $\forall$ scelte basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

$f(v_1) = 0_{V'}$

che ha coordinate tutte nulle

in qualsiasi base

② Cons $f = Id_V : V \longrightarrow V$ identità

$Id_V(v) = v$

Fisso $\mathcal{B}$ di V, e cons.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

e NON DIPENDE delle scelte di $\mathcal{B}$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Infatti:

$$Id_V(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$Id_V(v_2) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\vdots$$

$$Id_V(v_n) = v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_n$$

ATTENZIONE: Vedremo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) \neq \mathbb{I}_n$

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi diverse di V

$Id_V : V \to V$