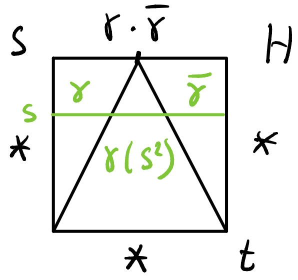
$\gamma : [0,1] \to X$ cammino $\Rightarrow \gamma \cdot \bar{\gamma} \simeq_{\{0,1\}} * \simeq_{\{0,1\}} \bar{\gamma} \cdot \gamma$

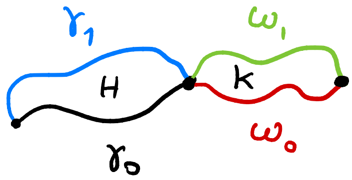
$$(\gamma \cdot \bar{\gamma})(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\gamma}(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t) \quad \Rightarrow \quad \bar{\gamma}(2t-1) = \gamma(2-2t)$

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(2st), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \gamma(s^2), & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \gamma(2s(1-t)), & 1-\frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lemma $\gamma_0, \gamma_1, \omega_0, \omega_1 : [0,1] \to X$ cammini t.c. $\gamma_0 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1$ e $\omega_0 \simeq_{\{0,1\}} \omega_1$. Supponiamo che $\gamma_0(1) = \omega_0(0)$. Allora $\gamma_0 \cdot \omega_0 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1 \cdot \omega_1$.



Dim Dalle ipotesi le concatenazioni $\gamma_0 \cdot \omega_0$ e $\gamma_1 \cdot \omega_1$ sono possibili.

$H, K : [0,1] \times [0,1] \to X$ omotopie (rel $\{0,1\}$) t.c.

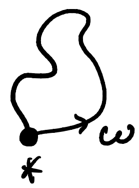
$h_0 = \gamma_0$, $h_1 = \gamma_1$, $k_0 = \omega_0$, $k_1 = \omega_1$.

Allora la concatenazione $H \cdot K$ è un'omotopia

$$\gamma_0 \cdot \omega_0 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1 \cdot \omega_1 .$$

Lemma $\gamma_0 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1 \Rightarrow \bar{\gamma}_0 \simeq_{\{0,1\}} \bar{\gamma}_1$. $\boxed{E}$

Def Sia X uno spazio topologico e $* \in X$ un punto. Un <u>cappio</u> in X basato su $*$ è un cammino continuo $\omega : [0,1] \to X$ t.c. $\omega(0) = \omega(1) = *$. Il punto $*$ è detto <u>punto base</u>.



L'insieme dei cappi in X basati su $*$ è denotato con

$$\Omega(X,*) \overset{\text{def}}{=} \{\omega : [0,1] \to X \mid \omega \text{ cappio}, \ \omega(0)=\omega(1)=*\}.$$

$* \in \Omega(X,*)$ cappio costante

$\omega, \gamma \in \Omega(X,*) \Rightarrow \bar{\omega}, \ \omega\cdot\gamma \in \Omega(X,*)$

<u>OSS</u> $\simeq_{\{0,1\}}$ è una relazione d'equivalenza su $\Omega(X,*)$.

<u>Corollario</u> Il prodotto di cappi è un'operazione binaria su $\Omega(X,*)$. A meno d'omotopia (rel $\{0,1\}$) si ha:

i) il prodotto è omotopicamente associativo;

ii) $* \in \Omega(X,*)$ è elemento neutro omotopico;

iii) $\bar{\omega}$ è inversa omotopica di $\omega \in \Omega(X,*)$.

iv) $\gamma_0, \gamma_1, \omega_0, \omega_1 \in \Omega(X,*)$ t.c. $\gamma_0 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1$ e $\omega_0 \simeq_{\{0,1\}} \omega_1$

$\Rightarrow \gamma_0\cdot\gamma_1 \simeq_{\{0,1\}} \omega_0\cdot\omega_1$ e $\bar{\gamma}_0 \simeq_{\{0,1\}} \bar{\gamma}_1$.

Pertanto ha senso la seguente definizione

<u>Def</u> Sia X uno spazio topologico e $* \in X$ un punto base. Il <u>gruppo fondamentale</u> di $(X,*)$ è l'insieme quoziente

$$\pi_1(X,*) \overset{\text{def}}{=} \Omega(X,*)/\simeq_{\{0,1\}}$$

munito dell'operazione binaria

$$[\omega]\cdot[\omega'] \overset{\text{def}}{=} [\omega\cdot\omega']$$

$\forall \ [\omega], [\omega'] \in \pi_1(X,*)$.

Corollario L'operazione $\cdot$ in $\pi_1(X,*)$ è ben definita e rende $\pi_1(X,*)$ un gruppo con elemento neutro $1 \overset{def}{=} [*]$ e inversa $[\omega]^{-1} \overset{def}{=} [\bar{\omega}]$.

Sia ora $f : X \to Y$ un'applicazione continua, $x_0 \in X$ e $f(x_0) \in Y$ punti base in X e Y.

$\omega \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow f \circ \omega \in \Omega(Y, f(x_0))$

Inoltre $\omega' \simeq_{\{0,1\}} \omega \Rightarrow f \circ \omega' \simeq_{\{0,1\}} f \circ \omega$

Infatti se H omotopia rel $\{0,1\}$ tra ω e ω' $\Rightarrow$ $f \circ H$ omotopia rel $\{0,1\}$ tra $f \circ \omega$ e $f \circ \omega'$.

$\rightsquigarrow$ $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, $f_*([\omega]) \overset{def}{=} [f \circ \omega]$ ben definita.

Teorema Siano X e Y spazi e $f : X \to Y$ continua. Per ogni $x_0 \in X$ l'applicazione

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

è un omomorfismo di gruppi detto <u>omomorfismo indotto da f</u>.

Dim $[\omega_1], [\omega_2] \in \pi_1(X, x_0) \rightsquigarrow$

$$f_*([\omega_1][\omega_2]) = f_*([\omega_1 \cdot \omega_2]) = [f \circ (\omega_1 \cdot \omega_2)].$$

$$f_*([\omega_1]) f_*([\omega_2]) = [f \circ \omega_1][f \circ \omega_2] = [(f \circ \omega_1) \cdot (f \circ \omega_2)]$$

$$\big(f \circ (\omega_1 \cdot \omega_2)\big)(t) = f\big((\omega_1 \cdot \omega_2)(t)\big) = \begin{cases} f(\omega_1(2t)), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(\omega_2(2t-1)), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\big((f \circ \omega_1) \cdot (f \circ \omega_2)\big)(t) = \begin{cases} (f \circ \omega_1)(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (f \circ \omega_2)(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Pertanto $f_*([\omega_1][\omega_2]) = f_*([\omega_1]) f_*([\omega_2])$.

Teorema (funtorialità) Siano X, Y, Z spazi e siano $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ continue. Scegliamo i punti base $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$ e $z_0 = g(y_0) \in Z$. Allora $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Inoltre $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$.

Dim L'ultima uguaglianza è ovvia. Per $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$:

$$(g \circ f)_* ([\omega]) = [(g \circ f) \circ \omega] = [g \circ (f \circ \omega)] = g_* ([f \circ \omega]) =$$

$$= g_* (f_* ([\omega])) = (g_* \circ f_*)([\omega]).$$

Corollario Sia $f: X \xrightarrow{\cong} Y$ un omeomorfismo, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. Allora $f_*: \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$ è un isomorfismo di gruppi e $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Dim $f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, y_0)}$

e in modo simile

$$(f^{-1})_* \circ f_* = id_{\pi_1(X, x_0)}.$$

Quindi f_* è invertibile e $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Teorema (invarianza omotopica) Siano $f, g: X \to Y$ continue e supponiamo $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Se $f \simeq_{\{x_0\}} g$ allora $f_* = g_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Dim $H: X \times [0,1] \to Y$ omotopia rel $\{x_0\}$ tra f e g

$h_0 = f$, $h_1 = g$, $h_s(x_0) = y_0 \quad \forall s \in [0,1]$

$\forall \omega \in \Omega(X, x_0) \rightsquigarrow K: [0,1] \times [0,1] \to Y$

$K(t,s) = H(\omega(t), s) \Rightarrow K_0 = f \circ \omega$, $K_1 = g \circ \omega$, $K_s(0) = K_s(1) = y_0$

$\Rightarrow f \circ \omega \simeq_{\{0,1\}} g \circ \omega \Rightarrow f_*([\omega]) = g_*([\omega])$.

OSS E' interessante scriverlo come $k_s = h_s \circ \omega \quad \forall s \in [0,1]$.

Def Sia X uno spazio e $A \subset X$ un sottospazio.
Una retrazione è un'applicazione continua $r: X \to A$ t.c. $r \circ i = id_A$, dove $i: A \hookrightarrow X$ è l'inclusione.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "id_A"'] & X \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd}$$

Def Sia $A \subset X$. Una <u>retrazione per deformazione forte</u> di X su A è una omotopia $H: X \times [0,1] \to X$ t.c.

i) $h_0 = id_X$

ii) $h_1(x) \in A \quad \forall x \in X$

iii) $h_t(a) = a \quad \forall a \in A$.

Scriviamo $X \simeq_s A$.

Se la (iii) vale solo per $t=1$ diciamo che H è una <u>retrazione per deformazione debole</u>.
A è detto retratto per deformazione forte (o debole) di X.
Diciamo anche che X si deforma (fortemente o debolmente) su A.

OSS Se H è una retrazione per deformazione forte o debole di X su A allora $h_1|: X \to A$ è una retrazione.
Una retrazione per deformazione debole è essenzialmente un'omotopia tra id_X e una retrazione $h_1: X \to A$.

Corollario Siano $x_0 \in A \subset X$. Se $X \gtrsim A$ allora

$i_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ è un isomorfismo,

dove $i : A \hookrightarrow X$ è l'inclusione.

Dim $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ retraz. per def. forte

$h_0 = id_X \simeq_A h_1 \implies h_{1*} = id_{\pi_1(X, x_0)}$

$r := h_1| : X \to A \implies h_1 = i \circ r \ , \ r \circ i = id_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "id_A"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend left, "h_1"] & A \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

$i_* \circ r_* = h_{1*} = id_{\pi_1(X, x_0)} \ , \quad r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A, x_0)}$

$\implies i_*$ isomorfismo.

Es $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n \ , \ r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ retrazione

$H : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow S^n$

$$H(x,t) = \frac{x}{1-t+t\|x\|}$$ retrazione per def. forte

$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \gtrsim S^n \implies \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, *) \cong \pi_1(S^n, *)$

con $* \in S^n$.

OSS $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \cong S^n \times]0, +\infty[$ $\boxed{E}$

Es $\mathbb{R}^n \gtrsim \{0\}$ $\quad H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$H(x,t) = t\,x$

$\implies \pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong \pi_1(\{0\}, 0) \cong \{1\}$ gruppo banale.