Lezione 9 dicembre 2021

giovedì 9 dicembre 2021 11:09

Visto: $f: V \longrightarrow V'$, AL

$\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B}'$ base di V'

possiamo cons. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.

TEOREMA:

Siano V e V' SV di dim. finita su $\mathbb{K}$.
$\dim V = n$ $\dim V' = m$

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V e V'.

Allora l'applicazione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathcal{L}(V, V') \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$f \rightsquigarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$$

dove $\mathcal{L}(V, V')$ = spazio di tutte le AL da V in V'

altra notazione: $\mathrm{Hom}(V, V')$

$\mathcal{L}(V, V')$ è uno SPAZIO VETTORIALE

Allora: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è un ISOMORFISMO

DI SPAZI VETTORIALI:

$$\mathcal{L}(V, V') \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$$

In particolare $\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n = \dim \mathcal{L}(V, V')$

* * *

Vediamo che $\mathcal{L}(V, V')$ è SV :

$f : V \to V'$, $g : V \to V'$

$f+g : V \longrightarrow V'$ è definita puntualmente

$$\underbrace{(f+g)}_{\substack{\text{esercizio} \\ \text{è ancora AL}}}(v) := f(v) \underset{\substack{\downarrow \\ V'}}{+} g(v)$$

$c \in \mathbb{K}$, $f : V \to V'$,

$$\underbrace{c \cdot f}_{\substack{\text{esercizio:} \\ \text{è ancora AL}}} : V \longrightarrow V', \quad (c \cdot f)(v) := c \cdot \underbrace{f(v)}_{\in V'}$$

$\mathcal{L}(V, V')$: vettore nullo è la AL NULLA.

* * *

CAMBIAMENTI DI BASE

PROP. : Siano U, V, e W SV

su $\mathbb{K}$, di dimensioni p, n e m.

Siano: $\mathcal{D} = \{u_1, \dots, u_p\}$ di U

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W

Siano $g : U \longrightarrow V$ e $f : V \longrightarrow W$ AL.

Allora: $f \circ g$ è ancora AL e si ha
$f \circ g : U \longrightarrow W$, $(f \circ g)(u) := f(g(u))$

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\mathcal{D}}_{\cancel{\mathcal{B}}}(g)$$

COROLLARIO: V SV su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ base di V. Allora si ha:

① Se $f : V \longrightarrow V$ operatore lineare.
Allora f è ISOMORFISMO $\Longleftrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è INVERTIBILE.

In tal caso si ha:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$$

② Se $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora A è invertibile

$\iff rg(A) = n.$

Dim.: ① Supp. $f: V \longrightarrow V$ isomorfismo.

$\exists\, f^{-1}$: inverso di f.

Si ha: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_V$

quindi $$\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1})}_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})} = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f)}_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)} = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V)}_{I_n}$$

per la Prop. precedente

$$\Longrightarrow \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}_{} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})}_{M} = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})}_{M} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}_{} = I_n$$

$$\Longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$$

Viceversa: se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile, allora

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\cdot X = 0$ ha solo la soluzione nulla

$\Rightarrow$ le soluzioni corrispondono a $\ker f$,

$\ker f = \{0_V\}$ $\Rightarrow$ f è iniettiva

$\Rightarrow$ per il Teo. di Dimensione, f è anche suriettiva

$\Rightarrow$ f è isomorfismo.

② $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\Leftrightarrow$

$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è isomorfismo

$(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A) = A)$

$\Leftrightarrow$ L_A è suriettiva

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} L_A = n = \operatorname{rg} A$.

* * *

Def.: Sia V sv, e siano

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$

due BASI di V.

La MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DA $\mathcal{B}$ ALLA $\mathcal{C}$ è la matrice

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)$$

$$Id_V : \overset{\mathcal{B}}{V} \longrightarrow \overset{\mathcal{C}}{V}$$

$$v \longrightarrow Id_V(v) = v$$

Le colonne di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)$:

$$\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{cccc}
\text{coordinate di } v_1 & \text{coordinate di } v_2 & \cdots & \text{coordinate di } v_n\\
\text{nella base } \mathcal{C} & \text{nella base } \mathcal{C} & \cdots & \text{nella base } \mathcal{C}\\
 & & \cdots &
\end{array}\right)
& \begin{array}{c} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n \end{array}\\
\begin{array}{cccc} Id_V(v_1) & & & Id_V(v_n)\\ = v_1 & & & = v_n \end{array} &
\end{array}$$

PROPRIETÀ : Se voglio scrivere le coordinate di $v \in V$ nella base $\mathcal{C}$, e conosco le sue coordinate nella $\mathcal{B}$:

v ha coordinate $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ nella $\mathcal{B}$

cons. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

coordinate in $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{rccc} Id_V : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longrightarrow & v \end{array}$$

PROP: La matrice di cambio di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)$ è invertibile, e si ha:

$$\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)\right)^{-1} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id_V)$$

Dim: Abbiamo visto

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V) = I_n$$

oss. $Id_V = Id_V \circ Id_V$

$$M^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\mathcal{B}}(Id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\cancel{\mathcal{C}}}(Id_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V \circ Id_V)$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V) = \mathbb{I}_n$$

$$M^{\mathcal{B}}_{e}(Id_V) \cdot M^{e}_{\mathcal{B}}(Id_V) = M^{e}_{e}(Id_V \circ Id_V)$$

$$= M^{e}_{e}(Id_V) = \mathbb{I}_n$$

$$\Rightarrow \quad M^{e}_{\mathcal{B}}(Id_V) = \left(M^{\mathcal{B}}_{e}(Id_V)\right)^{-1}$$

* * *

Come cambia la matrice di $f: V \to V'$ se cambio basi?

$f: V \longrightarrow V'$ AL

$\mathcal{B}$ base $\quad \mathcal{B}'$ base

$e \quad e'$

Allora $M^{e}_{e'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{e'}(Id_{V'}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot M^{e}_{\mathcal{B}}(Id_V)$

Infatti: $M^{\cancel{\mathcal{B}'}}_{e'}(Id_{V'}) \cdot M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\cancel{\mathcal{B}'}}(f) \cdot M^{e}_{\cancel{\mathcal{B}}}(Id_V)$

$$= M^{e}_{e'}\left(\overbrace{Id_{V'} \circ f \circ Id_V}^{= f}\right)$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{Id}_V"] & V \arrow[r, "f"] & V' \arrow[r, "\mathrm{Id}_{V'}"] & V' \\
v \arrow[r] \arrow[rrr, bend right] & v \arrow[r] & f(v) \arrow[r] & f(v)
\end{tikzcd}$$

In particolare: se $V = V'$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$

e $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & V \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & & \mathcal{C} \end{array}$$

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_V)}_{\overset{\|}{S^{-1}}} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)}_{=:S}$$

$$\Longrightarrow \quad M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = S^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot S$$

le matrici $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ si dicono SIMILI.

Def.: In generale, date $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono SIMILI se $\exists$ matrice invertibile $S \in M_n(\mathbb{K})$ t.c.

$\circledast$ $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$, $A \sim B$

Oss.: Se $A \sim B \implies \det A = \det B$

infatti: $\det B = \det(S^{-1} \cdot A \cdot S) =$

T. di BINET

$$= \underbrace{\det(S^{-1})}_{= \frac{1}{\det S}} \cdot \det A \cdot \det S$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det S}} \cdot \det A \cdot \cancel{\det S}$$

$$= \det A .$$