CORSO DI GEOMETRIA
SIMULAZIONE PROVA SCRITTA A.A. 2018/2019 - 19 DICEMBRE 2018
PROF. VALENTINA BEORCHIA

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

(1) Si enunci e si dimostri il Teorema di Struttura per le soluzioni di un sistema lineare. (oppure Formula di Grassmann, Teorema di Dimensione, Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz, Teorema di Rouché - Capelli, Teorema del Completamento ad una base, Teorema: due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di vettori, Definizione di determinante di una matrice quadrata e sue proprietà (senza dimostrazioni), Calcolo dalla matrice inversa per mezzo della matrice dei cofattori, Regola di Cramer, Sottospazi affini come insiemi di soluzioni di sistemi lineari, Equazioni Cartesiane e parametriche per sottospazi affini, Teorema: due spazi vettoriali di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione, Matrice che rappresenta una funzione lineare rispetto a due basi, Definizione del polinomio caratteristico, autovalori come radici del polinomio caratteristico, autospazi, Due criteri di diagonalizzabilità, Teorema: un operatore simmetrico ha n autovalori reali (contati con le loro molteplicità algebriche).

(2) Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + 2r_3 \\ -r_2 + r_3 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

- Si scriva la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.
- Si dimostri che $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p)$ è invertibile e se ne calcoli l'inversa.
- Si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$, si dica se la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile oppure no, motivando la risposta e detrminando gli eventuali autovalori con le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(4) Si scrivano delle equazioni cartesiane e parametriche per il piano affine H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ contenente la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 2y & = 2 \\ y + z & = 1 \end{cases}$$

e passante per il punto $(-1, 1, -1)$.

Inoltre, si determinino delle equazioni parametriche per la retta r' contenuta nel piano H e passante per il punto $(2, 2, 2)$.

Infine, si dica se le due rette r ed r' sono parallele o incidenti. Perché non possono essere sghembe?