Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2019/2020 - 5 febbraio 2020
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) (5 punti) Si scriva la definizione prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale e di base ortonormale rispetto a un prodotto scalare.

Si illustri l'algoritmo di Gram-Schmidt per l'ortonormalizzazione di una base in uno spazio euclideo.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{pmatrix}$.

(a) (3 punti) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) (4 punti) Si dica se A è invertibile, e in caso positivo si calcoli la sua matrice inversa.

(c) (3 punti) Si scriva la matrice $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) (3 punti) Sia H il piano vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$. Si determini la dimensione di $f(H)$ e una base di $f(H)$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (4 punti) Si determini il polinomio caratteristico di C e il suo spettro.

(b) (4 punti) Si trovi una base ortonormale di autovettori per C.

(4) (3 punti) Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiana del piano affine in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per i punti

$$P_1 = (1,2,0), \qquad P_2 = (0,3,2) \qquad \text{e} \qquad P_3 = (2,1,0)$$

(5) (3 Punti) Si trovino delle equazioni parametriche della retta r di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che verifichi le seguenti proprietà:

- sia parallela alla retta s di equazioni parametriche $s : \begin{cases} x = & t \\ y = & 1+t \\ z = & -1+t; \end{cases}$
- sia contenuta nel piano $x - y = 0$ e passante per l'origine $O = (0,0,0)$.