Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2019/2020 - 8 gennaio 2020
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) (5 punti) Si scriva la definizione di matrice invertibile. Si scriva la formula per la matrice inversa per mezzo della matrice dei cofattori.

Si dimostri che una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - z \\ -y \end{pmatrix}$.

(a) (3 punti) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) (4 punti) Si determinino le dimensioni di $\ker f$ e di $\mathrm{Im} f$, una base di $\ker f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

(c) (3 punti) Si dica se $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ sono in somma diretta in $\mathbb{R}^3$.

(d) (3 punti) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$.

(e) (4 punti) Si determini il polinomio caratteristico di f e il suo spettro.

(f) (4 punti) Si trovi una base ortonormale di autovettori per f.

(3) (a) (4 punti) Si trovi un′ equazione cartesiana del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (-1, 0, -1)$ e ortogonale alla retta r di equazioni cartesiane

$$r: \quad \begin{cases} z - x & = 2 \\ x + y & = 1 \end{cases} .$$

(b) (3 punti) Si determini la posizione reciproca delle rette

$$r: \quad \begin{cases} x = & t \\ y = & 1 - t \\ z = & 2 - t \end{cases} \qquad r': \quad \begin{cases} x = & \tau \\ y = & 1 + \tau \\ z = & 2 + \tau \end{cases}$$