**Corso di GEOMETRIA - Simulazione prova scritta**
**A.A. 2019/2020 - 31 gennaio 2020**
**Prof. Valentina Beorchia**

| Cognome | Nome |
|---|---|
| | |

(1) Si dia la definizione di autovalore e autovettore di un operatore lineare.
Si dimostri che uno scalare $\lambda$ è un autovalore per $f$ se e solo se $\lambda$ annulla il polinomio caratteristico $p_f(x)$ di $f$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. L'operatore $f$ è un isomorfismo?

(c) Nel caso $f$ sia un isomorfismo, si determini l'isomorfismo inverso

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

(d) Si consideri il piano coordinato $yz$ di equazione

$$H \ : \ x = 0.$$

Si determini la dimensione e una base del sottospazio $f(H)$.

(e) Si trovino due generatori del piano $L \subseteq \mathbb{R}^3$ per cui si abbia

$$f(L) = H,$$

dove $H$ è il piano $x = 0$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per $L_B$.

(4) Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiana del piano $H$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (1, -1, 1)$ e contenente la retta $r$ di equazioni parametriche

$$r : \qquad \begin{cases} x & = 4 - t \\ y & = 1 \\ z & = -t \end{cases} .$$

Si dica se il punto $Q$ appartiene ad $r$ oppure no.

(5) Si consideri il piano $K$ di equazione cartesiana

$$K : \qquad x - 4y - z = 1.$$

Si determinino delle equazioni parametriche della retta ortogonale a $K$ e passante per l'origine $(0, 0, 0)$.