Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 13 settembre 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale.

Si dimostri il seguente Teorema: in uno spazio vettoriale finitamente generato V, n vettori $v_1, \ldots, v_n$ formano una base se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione dell'immagine $f(r)$ della retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 & = -t \\ x_2 & = t \\ x_3 & = t \end{cases}$$

(d) **(3 punti)** Si dica se il seguente sistema è compatibile, e in caso affermativo si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dove $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t \\ z &= 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x &= \tau \\ y &= 3+\tau \\ z &= -2+\tau \end{cases}$$

Si dica se sono parallele, incidenti oppure sghembe. Nel caso siano complanari, si trovi un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano H passante per il punto $(1, 1, 1)$ e ortogonale alla retta

$$q : \begin{cases} x = & 1-t \\ y = & -2+3t \\ z = & -3+t. \end{cases}$$