Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 21 giugno 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di soluzione di un sistema lineare.

Si enunci e si dimostri il Teorema di Struttura per le soluzioni di sistemi lineari omogenei e non omogenei.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 & = -t \\ x_2 & = t \\ x_3 & = t \end{cases}$$

(d) **(3 punti)** Si dica se il seguente sistema è compatibile, e in caso affermativo si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x & = 1 + t \\ y & = 2 - t \\ z & = 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x & = -\tau \\ y & = 8 + \tau \\ z & = 1 - 2\tau \end{cases}$$

Si dica se sono parallele, incidenti oppure sghembe. Nel caso siano complanari, si trovi un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano passante per il punto $(1, 1, 1)$ e parallelo al piano

$$H : \begin{cases} x = & 1 - s \\ y = & -2 + 3t + s \\ z = & -3 + t. \end{cases}$$