

Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 12 luglio 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale.

Si enunci e si dimostri la Diseguaglianza di Cauchy- Schwarz.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nelle basi canoniche \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 e \mathcal{E}' di \mathbb{R}^2 .

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\text{Im} f$ e delle loro basi.

(c) **(1 punto)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}$$

(d) **(3 punti)** Si dica se il seguente sistema è compatibile, e in caso affermativo si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dove $A = M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(f)$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale \mathcal{B} di autovettori per L_B .

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 alla base \mathcal{B} e dalla base \mathcal{B} alla base \mathcal{E} .

- (4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - \tau \\ y = 2 + \tau \\ z = -2\tau \end{cases}$$

Si dica se sono parallele, o incidenti oppure sghembe. Nel caso siano complanari, si trovi un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

- **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano passante per il punto $(0, 1, -1)$ e parallelo al piano

$$H : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -2 - 3t + s \\ z = -3 + t. \end{cases}$$