

**Corso di GEOMETRIA - Prova scritta**  
**A.A. 2020/2021 - 22 febbraio 2021**  
**Prof. Valentina Beorchia**

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Si enunci e si dimostri la formula di Grassmann per due sottospazi vettoriali.

(2) Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice  $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$  di  $f$  nella base canonica  $\mathcal{E}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

(b) **(3 punti)** Si determinino le dimensioni di  $\ker f$  e  $\text{Im} f$  e delle loro basi.

(c) **(1 punto)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine  $f(r)$  della retta  $r$  di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = 6t \end{cases}$$

(d) **(3 punti)** Si determini il sottoinsieme delle soluzioni del sistema lineare  $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dove

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f).$$



- (4) • **(4 punti)** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  si considerino le rette  $r$  e  $s_a$  dipendente da un parametro  $a \in \mathbb{R}$ :

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} \quad s_a : \begin{cases} x + y + z = a \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Per quali valori di  $a$  le rette  $r$  ed  $s_a$  sono parallele, risp. incidenti, risp. sghembe?

- **(4 punti)** Si determinino delle equazioni cartesiane della retta  $q$  passante per il punto  $(1, 1, 1)$  e ortogonale al piano

$$H : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -2 + 3t + s \\ z = -3 + t. \end{cases}$$