

Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 25 gennaio 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

- (1) **(5 punti)** Si dia la definizione di rango di una matrice.
Si enunci e si dimostri il Teorema di Rouché - Capelli per sistemi lineari.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\text{Im} f$ e delle loro basi. f è un isomorfismo?

(c) **(1 punto)** Si dica, motivando la risposta, se $\ker f$ e $\text{Im} f$ sono in somma diretta.

(d) **(3 punti)** Si determini il sottoinsieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove
 $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale \mathcal{B} di autovettori per L_B .

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 alla base \mathcal{B} e dalla base \mathcal{B} alla base \mathcal{E} .

- (4) • **(4 punti)** Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiana del piano H di $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$ contenente la retta r di equazioni cartesiane parametriche

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

e ortogonale al piano L di equazione

$$L : 2x + 3y + z = 7.$$

- **(4 punti)** Si determini la posizione reciproca delle due rette di $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$

$$r : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = \tau \\ y = -5 + \tau \\ z = 0 \end{cases}$$

Nel caso di complanarità, si trovino delle equazioni parametriche del piano che le contiene.