Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 26 luglio 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di soluzione di un sistema lineare.

Si enunci e si dimostri il Teorema di Rouché - Capelli per sistemi lineari non omogenei.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f)$ di f nelle basi canoniche $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 &= -t \\ x_2 &= t \end{cases}$$

(d) **(3 punti)** Si dica se il seguente sistema è compatibile, e in caso affermativo si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f)$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 - t \\ z &= 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x &= \tau \\ y &= \tau \\ z &= 2 \end{cases}$$

Si dica se sono parallele, incidenti oppure sghembe. Nel caso siano complanari, si trovi un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

• **(4 punti)** Si consideri il piano dello spazio affine di equazioni parametriche $H : \begin{cases} x = & 1 - s \\ y = & -2 + 3t + s \\ z = & -3 + t. \end{cases}$

Si verifichi che il punto $(1, 0, 1)$ non appartiene ad H.
Si determini, inoltre, un'equazione cartesiana del piano M passante per il punto $(1, 0, 1)$ e parallelo ad H.