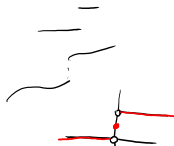


3 dicembre

Esempio di funzione primitivabile in $\mathbb{R}$ che non è continua in $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



f non è continua in 0 ed è primitivabile in $\mathbb{R}$.

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Per } x \neq 0 \quad G'(x) &= (x^2 \cos(\frac{1}{x}))' = 2x \cos(\frac{1}{x}) + x^2 (\cos(\frac{1}{x}))' \\ &= 2x \cos(\frac{1}{x}) + x^2 \cdot \cos'(\frac{1}{x}) \cdot (\frac{1}{x})' = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) \end{aligned}$$

$$\text{Per } x \neq 0 \quad \text{ho} \quad G'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})$$

$$\begin{aligned} G'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x})}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\frac{1}{x}) = 0 \end{aligned}$$

$$G'(0) = 0$$

$$G'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ricordiamo} \\ f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$G'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) + f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 + f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Se pongo

$$h(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

ho dimostrato finora che

$$G'(x) = h(x) + f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se resto a dimostrare che $\exists V(x) \quad t.s.$

$$V'(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ segue}$$

$$\text{che } f(x) = (G - V)'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi $F(x) = G(x) - V(x)$ è una primitiva della f .

Siccome $h \in C^0(\mathbb{R})$ allora la V di cui sopra esiste.

Esercizio Dimostrare che $F(x) = \int_0^x \sin(\frac{1}{t}) dt$ è ben definita

e che è una primitiva della $f(x)$.

Stabilire se $\int_1^{+\infty} \underbrace{\log(1+\frac{1}{x}) \operatorname{th}(x) \sin(x) dx}_{f(x)}$ è convergente
 e se è assolutamente convergente. $\bar{e}^{-x^2}$
 $f \in C^0([1, +\infty))$

$$f(x) = \log(1+\frac{1}{x}) \operatorname{th}(x) \sin(x) =$$

$$\log(1+y) = \int_0^y \frac{1}{1+t} dt = \int_0^y (1-t+t^2+o(t^2)) dt = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x} \operatorname{th}(x) \sin(x)}_{g(x)} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \operatorname{th}(x) \sin(x) + o(\frac{1}{x^2}) \operatorname{th}(x) \sin(x)$$

per confronto con $\frac{1}{x^2}$ è ass. integrabile in $[1, +\infty)$
 ass. integrabile in $[1, +\infty)$ ma costante asintotica con $\frac{1}{x^2}$

$f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso comportamento

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \operatorname{th}(x) = \frac{\sin x}{x} (1 - 2e^{-2x}(1+o(1))) =$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} - 2e^{-2x} \frac{\sin x}{x} (1+o(1))$$

(ass. integrabile in $[1, +\infty)$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-2x} \frac{|\sin x|}{x} |1+o(1)|}{e^{-2x}} = 0$$

e siccome $e^{-2x} \in L[1, +\infty)$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R e^{-2x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2R}}{2} \right) = \frac{e^{-2}}{2}$$

Conclusione: g ed f non sono integrabili in $[1, +\infty)$ ma non assolutamente integrabili.