$A \in M_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow A_{ij}$ minore ottenuto cancellando i-esima riga e j-esima colonna di A

$\rightsquigarrow a_{ij}^* = (-1)^{i+j} A_{ij}$

Def La matrice dei cofattori di $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ è

$$\mathrm{cof}(A) \stackrel{def}{=} (a_{ij}^*) \in M_n(\mathbb{K}).$$

Teorema Sia $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Allora

$$A \cdot {}^t\mathrm{cof}(A) = \det A \cdot I_n .$$

Dim ${}^t\mathrm{cof}(A) = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ji}^* \rightsquigarrow$ usando Laplace

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij}^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ji} = (A \cdot {}^t\mathrm{cof}(A))_{ii}$$

Sia ora $A' = (a'_{pq})$ la matrice ottenuta da A rimpiazzando la k-esima riga con l'i-esima : $a'_{pq} = \begin{cases} a_{iq}, & p = k \\ a_{pq}, & p \neq k \end{cases}$ $(i \neq k)$.

Quindi A' ha due righe uguali ad $A^{(i)}$: l'i-esima e la k-esima $\Rightarrow \det A' = 0$. Laplace $\rightsquigarrow$

$$0 = \det A' = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj}^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} = (A \cdot {}^t\mathrm{cof}(A))_{ik}, \quad i \neq k.$$

Corollario Se $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t\mathrm{cof}(A)$$

Dim $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. La formula si ricava subito dal teorema moltiplicando entrambi i membri a sinistra per $(\det A)^{-1} A^{-1}$.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sviluppo rispetto alla 1ª colonna

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ $\quad \mathrm{Cof}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{cof}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema di Cramer Sia $S : AX = B$ un sistema lineare, con $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Allora l'unica soluzione di S è:

$$x_i = \frac{\det \hat{A}_i}{\det A}, \quad \forall\, i = 1, \dots, n,$$

dove $\hat{A}_i$ è la matrice ottenuta da A sostituendo B alla i-esima colonna.

Dim $X = A^{-1} B = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{cof}(A)\, B \Rightarrow$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a^*_{ji}\, b_j$ ma $\sum_{j=1}^{n} b_j\, a^*_{ji} = \det \hat{A}_i$

è lo sviluppo di Laplace rispetto alla i-esima colonna di $\hat{A}_i$.

Es $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5$

$x = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{13}{5}$

$y = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{7}{5}$

$\begin{cases} x = -\frac{13}{5} \\ y = -\frac{7}{5} \end{cases}$

Rango Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $r = \text{rg}\, A \leq \min(m,n)$.

$\exists\ A' \in M_r(\mathbb{K})$ sottomatrice quadrata di A t.c. $\text{rg}\, A' = r$ (A' si ottiene scegliendo prime r righe di A lin. indip. e da qui si selezionano r colonne lin. indip.)

$\Rightarrow \det A' \neq 0$

Quindi $\text{rg}\, A = r \iff \exists$ minore di ordine r non nullo e ogni minore di ordine $r+1$ è nullo.

Teorema di Kronecker (o dei minori orlati)

$\text{rg}\, A = r \iff \exists$ minore $|A'|$ di ordine r non nullo e tutti i minori di ordine $r+1$ ottenuti "orlando" A', cioè aggiungendo ad A' una riga e una colonna di A, sono nulli.

Es $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & -1 \\ & 1 \\ 1 \quad 3 & 0 \end{pmatrix}$, $|A'| = -3$, $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$.

Se $A = (a_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & S \end{array}\right)$ matrice a blocchi con

$P \in M_p(\mathbb{K})$, $S \in M_s(\mathbb{K})$, $Q \in M_{p,s}(\mathbb{K})$,
$O \in M_{s,p}(\mathbb{K})$ nulla.

Allora $\det A = \det P \cdot \det S$. Lo dimostriamo per induzione su p.

<u>Base dell'ind.</u>: $p=1$ $\qquad A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & Q \\ \hline 0 & \\ \vdots & S \\ 0 & \end{array}\right)$

sviluppando rispetto alla 1ª colonna $\det A = a_{11} \det S$.

<u>Ipotesi induttiva</u>: sia vero per $p-1 \geq 1$ e dimostriamolo per p. Sviluppando rispetto alla 1ª colonna:

$$a^*_{i1} = (-1)^{i+1} A_{i1} = (-1)^{i+1} P_{i1} \det S \quad (\text{ip. induttiva})$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{p} a_{i1} a^*_{i1} = \det S \cdot \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} a_{i1} P_{i1} = \det S \cdot \det P$$

<u>Es</u>

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 41 & 17 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{vmatrix} = (-1)\,(-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 .$$

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si chiama spazio vettoriale duale di V lo spazio

$$V^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}).$$

Ricordiamo che se V e W sono $\mathbb{K}$-spazi vett. di dim finita allora $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

Quindi $\dim V^* = \dim V$ (se $\dim V < \infty$)

$\Rightarrow V^* \cong V$.

Gli elementi di V^* sono funzioni lineari $\varphi : V \to \mathbb{K}$ dette <u>forme lineari</u>

$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di $V \rightsquigarrow$

$\varphi_i : V \to \mathbb{K}$ <u>forma lineare</u> t.c. $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j$

$$\varphi_1(v_1) = 1, \quad \varphi_1(v_2) = 0, \dots, \quad \varphi_1(v_n) = 0$$
$$\varphi_2(v_1) = 0, \quad \varphi_2(v_2) = 1, \dots, \quad \varphi_2(v_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi_n(v_1) = 0, \quad \varphi_n(v_2) = 0, \dots, \quad \varphi_n(v_n) = 1$$

Mostriamo che $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ è base per V^* detta <u>base duale</u> di $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \right)(v_j) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(v_j) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j$$

$\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n$ lin. indip. $\Rightarrow$ base.

Se $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \Rightarrow \varphi_i(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_i(v_j) = \alpha_i \quad \forall i$

quindi $(\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$ sono le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{V}$, cioè

$$v = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(v) \, v_j .$$

Se $\varphi \in V^* - \{0\} \Rightarrow \operatorname{im} \varphi = \mathbb{K} \Rightarrow$
$\dim \ker \varphi = \dim V - 1$.

<u>Es</u> $(\mathbb{R}^2)^* \rightsquigarrow \Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ base duale di $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$

$\varphi_1(x, y) = x$

$\varphi_2(x, y) = y$.

<u>OSS</u> Se $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ è base per V e $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ è la base duale di $\mathcal{V} \Rightarrow$

$\exists !\ F : V \to V^*$ isomorfismo t.c. $F(v_j) = \varphi_j \ \forall j$

F dipende dalla base scelta!

Non esiste un isomorfismo canonico $V \to V^*$

Equazioni di sottospazi affini

$Q \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio affine con giacitura $W \subset \mathbb{K}^n$.

$\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_k)$ base di W, $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in Q$

$X = t_1 w_1 + \dots + t_k w + q \rightsquigarrow$ eliminando $t_1, \dots, t_k$ si ottiene un sistema lineare $S : AX = B$ t.c. $Q = \Sigma_S$.

Es $W = \operatorname{span}(e_1 + 2e_2,\ e_2 - e_3) \subset \mathbb{R}^3$

$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad Q \subset \mathbb{R}^3$ sottosp. aff. passante per q e di giacitura W

$$X = t(e_1 + 2e_2) + u(e_2 - e_3) + q$$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + u - 1 \\ z = -u \end{cases} \qquad \begin{cases} t = x - 1 \\ u = -z \\ y = 2(x-1) - z - 1 \end{cases}$$

$$Q : \ 2x - y - z = 3 .$$

Ogni sottosp. aff. di dimensione k di $\mathbb{K}^n$ è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare di $n-k$ equazioni in n incognite.
Se il sottospazio è vettoriale, il sistema è omogeneo. Il sistema non è unico!