Lunedì 20 settembre 2 ore . Numeri naturali. Principio di induzione. Teorema sulle dimostrazioni per induzione. Un esempio di dimostrazione per induzione: dimostrazione parziale della disuguaglianza di Bernoulli.

Martedì 21 settembre 2 ore . Completamento della dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli. Sommatorie, somma aritmetica. Dimostrazione per induzione della formula per somme geometriche di ragione x .

Giovedì 23 settembre 2 ore . Fattoriali e coefficienti binomiali. Formula di Newton per i binomi (con dim.). Triangolo di Tartaglia. Insieme dei numeri complessi C . Somma e prodotto in C . R come sottoinsieme di C .

Venerdì 24 settembre 2 ore . Numero $i=(0,1)$ e verifica che $i^2=-1$. Complesso coniugato di z . Valore assoluto $|z|$. Esistenza di $1/z$ se $z \neq 0$ (con dim.). Svolgimento di vari esercizi sui numeri complessi.

Lunedì 27 settembre 2 ore Polinomi e loro radici. Teorema fondamentale dell'algebra, versione 1, sull'esistenza di una radice in C per ogni polinomio di grado ≥ 1 . Teorema fondamentale dell'algebra, versione 2, sulla fattorizzazione in polinomi di grado 1. Breve sketch del perché la versione 1 è equivalente alla versione 2. Molteplicità delle radici di un polinomio. Rappresentazione di un numero complesso in termini delle coordinate polari e Formule di De Moivre (senza dim). Qualche esempio.

Martedì 28 settembre 2 ore . Radici n -esime dell'unità. Esempio $z^4=1$. Radici n -esime di un numero complesso qualsiasi: esempio con le radici ottave di $1+i$. Un esercizio con risoluzioni di equazioni usando la formula di De Moivre.

Giovedì 29 settembre 2 ore . Un esercizio con risoluzioni di equazioni usando la formula di De Moivre. Classi separate. Elementi di separazione. Assioma di separazione in R . Retta reale estesa. Definizione di estremo superiore. Teorema sull'esistenza dell'estremo superiore di qualsiasi sottoinsieme di R (senza dim.). Verifica che se X è un intervallo di estremi $a < b$, allora $\sup X = b$

Venerdì 1 ottobre 2 ore $\sup N = \infty$ (con dim). Definizione di sottoinsieme limitato (superiormente, inferiormente) di R . Una caratterizzazione dell'estremo superiore, quando è finito (senza dim.). Minimo e massimo di un insieme. Principio di Archimede (con dim.). Ogni sottoinsieme finito (cioè con un numero finito di elementi) di R ha massimo (senza dim.). Densità di Q in R (con dim.).

Lunedì 4 ottobre 2 ore Definizione di funzione tra due insiemi. Vari esempi di funzione: funzione di Heaviside, funzione segno, funzione di Dirichlet, funzione parte intera. Funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti. Prodotto cartesiano di una coppia ordinata di insiemi. Grafico di una funzione. Immagine di un insieme e controimmagine di un insieme. Funzioni pari, dispari. Funzioni iniettive, suriettive e biettive. Verifica che ogni sottoinsieme di N ha minimo. Qualche esercizio.

Martedì 5 ottobre 2 ore . Dimostrazione che un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ ha massimo. Relazione tra grafici di una funzione biettiva e della sua inversa. Esempi: arcoseno ed arcotangente Definizione della funzione valore assoluto $|x|$ e proprietà. In particolare, dimostrazione della disuguaglianza triangolare. Distanza tra due punti della retta e relativa disuguaglianza triangolare.

Giovedì 7 ottobre 2 ore Successioni. Definizione di limite di una successione (nel caso di limite finito). Vari esempi. Definizione di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ per L numero reale e per una funzione a valori reali definita su un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$. Verifica che di $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ non esiste. Verifica che se $|L_1 - L_2| < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ allora $L_1 = L_2$.

Venerdì 8 ottobre 2 ore Teorema dell'unicità del limite (con dim solo nel caso di limiti reali). Definizione di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Per $b > 1$ verifica di $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = +\infty$. Regole (solo enunciato, senza dimostrazioni) della somma, del prodotto e del quoziente per limiti per x Teorema del confronto (solo enunciato). Teorema dei Carabinieri (senza dim.) Dimostrazione che per $b > 0$ il limite di $b^{1/n}$ è 1.

Lunedì 11 ottobre 2 ore Dimostrazione del teorema dei Carabinieri . Verifica che per $b > 1$ il limite di b^n/n è $+\infty$. Dimostrazione che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup f(X)$ per funzioni crescenti. Numero di Nepero ed enunciato sul fatto che la successione $(1 + 1/n)^n$ è strettamente crescente. Verifica per $b > 1$ il limite di b^x per $x \rightarrow +\infty$ è $+\infty$.

Martedì 12 ottobre 2 ore . Definizione di punto di accumulazione per un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$. Verifica che un insieme finito in $\mathbb{R}$ non ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$. Verifica che Z non ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$. Verifica che l'insieme dei punti di accumulazione di Q è tutto $\mathbb{R}$. Definizione di $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = L$ per L in $\mathbb{R}$ per y un punto di accumulazione del dominio di f . Un esempio. Due definizioni di funzione continua in un punto. Verifica che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste se f è una funzione periodica e non costante in $\mathbb{R}$.

Giovedì 14 ottobre 2 ore Dimostrazione parziale dell'equivalenza di varie distinte definizioni di continuità. Teorema sulle regole dei limiti (somma, prodotto, quoziente, tutte senza dim). Teoremi del confronto e dei Carabinieri (solo gli enunciati). Verifica della continuità di $\sin(x)$ e di $\cos(x)$ in 0 e verifica della continuità di $\sin(x)$ in tutto $\mathbb{R}$. Enunciato sulla continuità di $\cos(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. Dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$.

Venerdì 15 ottobre 2 ore $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$, senza dim. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = e^x$, con dim. ore Completamento della dimostrazione dell'equivalenza di varie distinte definizioni di continuità. Dimostrazione che se un punto y è di accumulazione per X allora esiste una successione strettamente monotona in X che ha come limite y .

Lunedì 18 ottobre 2 ore Definizione di limite destro e limite sinistro. Caratterizzazione del limite in termini di limiti destro e sinistro (senza dim.). Teorema sui limite destro e sinistro per funzioni monotone (senza dim.). Dimostrazione della continuità di b^x . Successioni di intervalli dimezzati e lemma su tali

successioni (senza dim). Sottosuccessioni di una successione. Chiusura di un sottoinsieme di R, sottoinsiemi chiusi di R. Sottoinsiemi limitati di R. Teorema di Bolzano Weierstrass per successioni in $[a,b]$ (enunciato).

Martedì 19 ottobre 2 ore Dimostrazione del teorema di Bolzano Weierstrass per successioni in $[a,b]$. Punti di massimo e punti di minimo di una funzione. Dimostrazione del teorema di Weierstrass per $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Dimostrazione della caratterizzazione del limite in termini di limiti destro e sinistro.

Giovedì 21 ottobre 2 ore Verifica che i polinomi di grado pari hanno o un punto di massimo o un punto di minimo in R. Teorema degli zeri (con dim.). Esempio dell'esistenza di uno zero reale per polinomi a coefficienti reali di grado dispari. Verifica che i polinomi di grado dispari hanno uno zero in R. Teorema dei valori intermedi (con dim.). Verifica che i polinomi di grado dispari sono funzioni suriettive di R in R. Esercizi sui punti di accumulazione.

Venerdì 22 ottobre 2 ore Teorema sul fatto che se f è continua, l'immagine $f(I)$ di un connesso I è un connesso (senza dim.). Teorema sulla continuità delle funzioni inverse di funzioni strettamente monotone definite su intervalli (senza dim.). Continuità della composizione di due funzioni continue (con dim.). Esempio: continuità di x^a . $\lim_{y \rightarrow 0} \log(1+y)/y = 1$ (con dim.), $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ (con dim.). $\lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)^a - 1]/x = a$ (senza dim.).

Lunedì 25 ottobre 2 ore Rapporti incrementali e significato geometrico. Definizione di derivata. Retta tangente al grafico in un punto. $\lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)^a - 1]/x = a$ (senza dim.). Dim. di $(c)'=0$, $(x^a)' = a x^{a-1}$ (regola della potenza). $(e^x)' = e^x$ con dim., $(\sin x)' = \cos x$ (con dim.) e $(\cos x)' = -\sin x$ (senza dim.). Teorema di Fermat (con dim.). Un esempio.

Martedì 26 ottobre 2 ore Regole della somma, del prodotto (con dim.) e del quoziente (solo enunciata). Regola della catena (con dim.). Alcuni esempi. Un esercizio su una funzione continua in R che ammette punto di minimo.

Giovedì 28 ottobre 2 ore Completamento dell'esercizio funzione continua in R che ammette punto di minimo non completato nella lezione precedente. Teorema della derivata della funzione inversa (con dim.). Esempi: derivata di $\arcsin(x)$ e di $\arctan(x)$. Funzioni iperboliche e loro derivate. Inversa del $\sinh(x)$ (con dim.). Definizione di punti di massimo e di minimo relativo.

Venerdì 29 ottobre 2 ore Come applicazione di Fermat, dimostrazione di $1+x \leq e^x$ su R. Teorema di Rolle (con dim.). Teorema di Lagrange (con dim.). Significato geometrico del segno della derivata. Un esercizio teorico. Teorema di Cauchy (senza dim.). Prima regola dell'Hopital (con dim.).

Giovedì 4 novembre 2 ore Seconda regola dell'Hopital (con dim.). Esempi. Terza regola dell'Hopital (senza dim.). Qualche esempio di limite relativo alle regole dell'Hopital. Gerarchie all'infinito. Definizione di derivate di ordine superiore. Derivate di x^a . Suttoinsiemi convessi del piano.

Venerdì 5 novembre 2 ore Varie definizioni distinte, ma equivalenti, delle funzioni convesse (senza dim. dell'equivalenza). Caratterizzazione delle funzioni convesse in termini della loro derivata prima (con dim.). Corollario di caratterizzazione delle funzioni convesse in termini della loro derivata seconda (con dim.). Funzioni concave.

Lunedì 8 novembre 2 ore Punti di flesso. Una ricerca di concavità, convessità e punti di flesso da un vecchio esame. Studio della funzione $(x^2 + 1)/(x-1)$. Rette asintotiche. Ricerca delle rette asintotiche nel precedente esempio. Lemma sull'unico polinomio di grado minore o uguale ad n le cui derivate in un punto 0 sono date da $n+1$ numeri preassegnati (con dimostrazione).

Martedì 9 novembre 2 ore Enunciato (soltanto) sull'unico polinomio di grado minore o uguale ad n le cui derivate in un punto x_0 sono date da $n+1$ numeri preassegnati (dimostrato la vostra scorsa nel caso $x_0=0$). Studio della funzione $x^4/4 + x^3 - 2x^2 + 1/2$. Calcolo di tutte le derivate di $\sin(x)$ (con dim.) e formula per le derivate di $\cos(x)$ (senza dim.). Formula sulle derivate di $(1+x)^a$ (senza dim.). Calcolo delle derivate di $\log(1+x)$. Infine, un esercizio di esame.

Giovedì 11 novembre 2 ore Definizione di polinomio di Taylor e di polinomio di McLaurin. Derivazione dei polinomi di McLaurin di e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$. Polinomio di McLaurin di $(1+x)^a$ (senza dimostrazione).

Venerdì 12 novembre 2 ore Formula di Lagrange per il resto (con dimostrazione). Applicazione della formula di Lagrange: approssimazione di e con un numero razionale con errore inferiore a 10^{-3} . Definizione di o piccolo, in particolare $o(1)$ ed $o(g(x))$: vari esempi. Formula di Peano per il resto (senza dim.).

Lunedì 15 novembre 2 ore Lemma sul fatto che se $p(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale di n con $p(x) = o((x-x_0)^n)$ allora $p(x)$ è il polinomio nullo (con dimostrazione). Dimostrazione che se $f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n)$ con $p(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale di n , allora p è il polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0 . Utilizzo della formula di Peano per il calcolo di vari polinomi di McLaurin di x^2 , $\sin(x^3)$, di $(1+x)^{-1}$, $(1-x)^{-1}$ e di $(1+x^2)^{-1}$. Inizio dello svolgimento di un limite dell'esame del 13/01/2014

Martedì 16 novembre 2 ore Completamento dell'esercizio iniziato alla scorsa lezione. Calcolo di tutti i polinomi di McLaurin di $\sin(x^2) + \cos(x^2)$, esercizio 4 dell'esame del 28/06/2021.

giovedì 18 novembre 2021, 2 ore. Cenni introduttivi all'integrazione secondo Darboux. Decomposizioni Δ di intervalli e loro calibro $|\Delta|$. Raffinamenti di decomposizioni Somme $S(\Delta)$ e $s(\Delta)$ associate ad una data funzione f . Calcolo di $S(\Delta)$ e $s(\Delta)$ per funzioni costanti e per la funzione di Dirichlet. Calcolo di $S(\Delta)$ e $s(\Delta)$ per funzioni crescenti. Lemma sul fatto che $s(\Delta) \leq s(\Delta') \leq S(\Delta') \leq S(\Delta)$ se Δ' è un raffinamento di Δ (senza dim.). Lemma sul fatto che date due decomposizioni esiste una decomposizione che è un raffinamento di entrambe (con dim.). $s(\Delta') \leq S(\Delta)$ per ogni coppia Δ', Δ (con dim.).

Venerdì 19 novembre 2 ore Definizione di integrale superiore e di integrale inferiore. Calcolo dell'integrale superiore ed inferiore per funzioni costanti e per la funzione di Dirichlet. Definizione di integrale di Darboux. Teorema con una condizione necessaria e sufficiente perché una funzione sia integrabile secondo Darboux (con dim.). Integrabilità per Darboux delle funzioni monotone (con dimostrazione). Integrabilità per Darboux delle funzioni continue (senza dim.). Integrabilità per Darboux di somme e prodotti di funzioni integrabili (senza dim.).

Lunedì 22 novembre 2 ore Integrale di Riemann e sua equivalenza con l'integrale di Darboux (senza dim.). Monotonia dell'integrale (solo enunciata). Media di una funzione. Teorema della media (con dim.). Teor. sull'integrabilità di $|f(x)|$ se $f(x)$ è integrabile (senza dim.) e disuguaglianza triangolare (con dim.). Funzione integrale. Continuità della funzione integrale (senza dim.). Teorema fondamentale del calcolo (senza dim.).

Martedì 23 novembre 2 ore Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo nel caso di funzioni continue. Primitive e funzioni primitivabili.

venerdì 26 novembre 2021 2 ore Teorema di valutazione (con dim.). Formula dell'integrazione per parti (con dim.) con qualche applicazione. Calcolo dei polinomi di McLaurin di $\arctan(x)$.

Lunedì 29 novembre 2 ore Formula del cambio di variabile per integrali indefiniti (con dim.): qualche esempio. Formula del cambio di variabile per integrali definiti (con dim.).

Martedì 30 novembre 2 ore Formula del cambio di variabile per integrali definiti: qualche esempio. Un esempio dall'esame del 20/06/2016.

Giovedì 2 dicembre 2 ore Qualche esempio di espansione di Hermite per funzioni razionali nel caso $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado P maggiore o uguale al grado Q . Definizione di integrale improprio. Integrabilità di funzioni x^{-p} in $(0, 1]$.

Venerdì 3 dicembre 3 ore Integrabilità di funzioni x^{-p} in $[1, \infty)$: enunciato e dimostrazione. Teorema su monotonia ed linearità dell'integrale improprio (senza dim.). Integrali impropri: Aut-Aut (con dim.); teorema del confronto (con dim.). Teorema sulla espansione di Hermite per funzioni razionali:

enunciato (senza dim.) nel caso $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado $P <$ grado Q . Vari esempi elementari. Scomposizione di Hermite di $\frac{1}{(1+x^2)^2}$

Lunedì 6 dicembre 2 ore Teorema del confronto asintotico per integrali impropri (senza dim.). Definizione di funzione assolutamente integrabile. Esempi. Teorema che assoluta integrabilità implica integrabilità (solo enunciato). Verifica che $\sin(x)/x^p$ è integrabile in $[1, +\infty)$ per ogni $p > 0$.

Martedì 7 novembre 2 ore Esercizi su integrali e studi di funzione, da vecchi esami.

Giovedì 9 dicembre 2 ore Un esempio di funzione non continua su $\mathbb{R}$ ma primitivabile in $\mathbb{R}$. Esercizi sugli integrali.

Venerdì 10 dicembre 2 ore . Espansione di Hermite per funzioni razionali nel caso $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado P maggiore o uguale al grado Q . Vari esempi di espansioni di Hermite. Svolgimento dell'esercizio 2 esame del 14 giugno 2021