Integrali generalizzati (impropri)

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$? $\frac{1}{x}$ è illimitata

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$?

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$?

Funzioni limitate su intervalli non limitati

Sia $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ f localmente integrabile ; poniamo, se esiste

$$\int_a^{+\infty} f\,dm = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f\,dm$$

; se questo limite esiste finito, diciamo che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$.

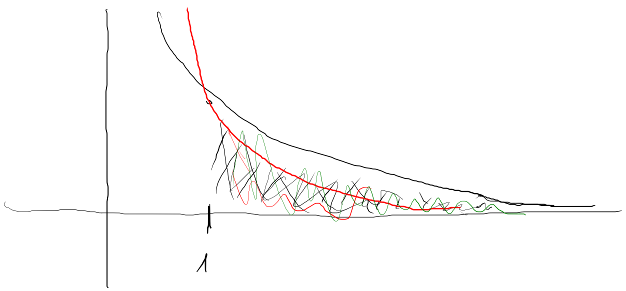
Discorso analogo su $]-\infty, a]$ $\int_{-\infty}^{a} f\,dm = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f\,dm$

Es: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \log b = +\infty$

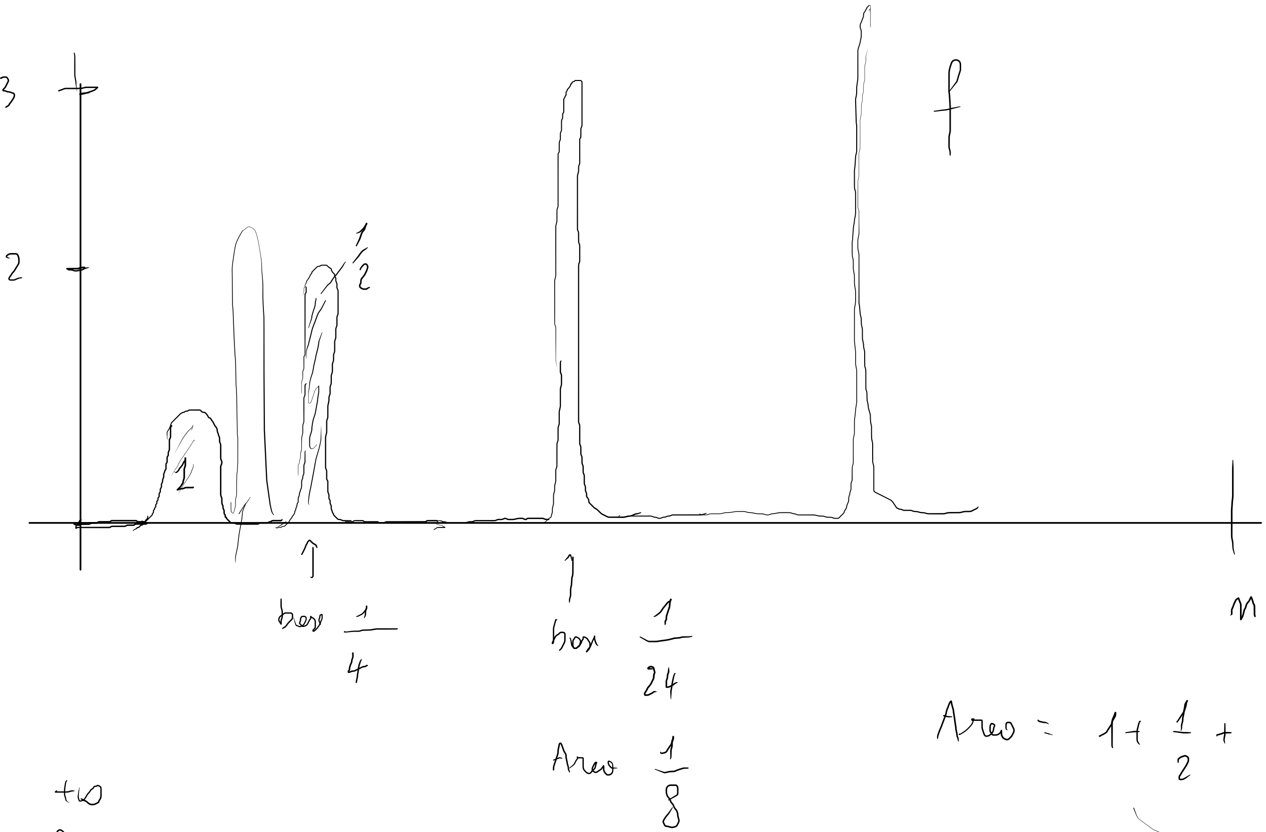
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$\alpha > 0 \quad \alpha \neq 1$

La funzione $\dfrac{1}{x^\alpha}$ è integrabile su $[1, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$



$\dfrac{1}{10 - 1} = \dfrac{1}{9}$



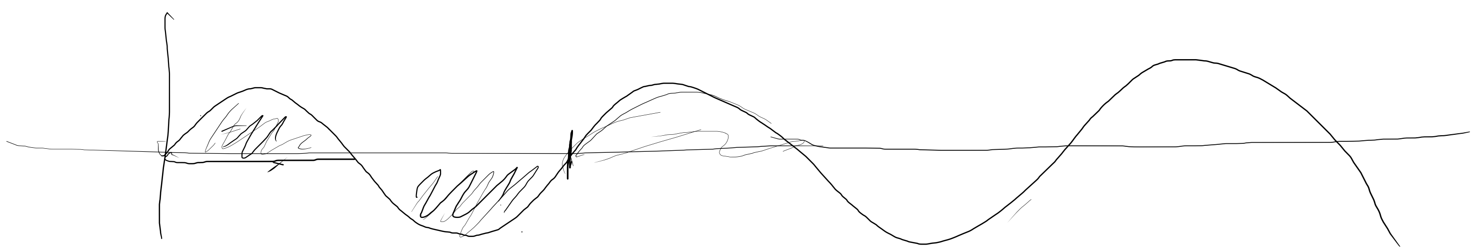
$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\text{Area} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots}\ = 2$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 2$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{b \to -\infty} \left(1 - e^{b}\right) = 1$$

$$\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\cos(b) + 1\right) = \text{Non esiste!}$$



OSSERVAZIONE (Aut aut per l'integrale generalizzato)

Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ localmente integrabile; sia $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, +\infty[$, allora :

esiste $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \ (f \text{ è integrabile in senso gen.}) \end{cases}$

Dim

$\varphi(b) = \int_a^b f(x)dx \qquad \boxed{\varphi'(b) = f(b)} \geq 0 \Rightarrow \varphi \text{ è crescente} \Rightarrow \exists \lim_{b \to +\infty} \varphi(b) = \int_a^{+\infty} f(x)dx$

$b_1 < b_2 \qquad \underbrace{\int_a^{b_2} f(x)dx}_{\varphi(b_2)} = \int_a^{b_1} f(x)dx + \underbrace{\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx}_{\geq 0} \geq \int_a^{b_1} f(x)dx = \varphi(b_1)$

Es:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$e^{-x^2} \le e^{-x}$$

$$\le \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^b = e^{-1}$$

quindi la funzione e^{-x^2}

è integrabile in senso generalizzato

su $[0,+\infty[$

Teorema del confronto per gli integrali generalizzati

$f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, loc. int'ey., $0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[$

sia g integrabile in senso gen. su $[a, +\infty[$, allora anche f lo è e $\underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx}$

se f non è integrabile in senso gen., non lo è nemmeno g.

Dim $\forall b > a \qquad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \le \lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)\,dx$$

(i limiti esistono per il AUT AUT!)

Criterio dell'ordine di infinitesimo per gli integrali generalizzati

Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ localmente integrabile, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, +\infty[$

Supponiamo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1) Sia $\operatorname{ord}_{+\infty}(f) \geq \alpha > 1$ $\alpha \in \mathbb{R}$; allora f è integrabile in senso gen. su $[a, +\infty[$

2) Sia $\operatorname{ord}_{+\infty}(f) \leq 1$; allora f NON è integrabile in senso gen. su $[a, +\infty[$

Dim 2) $\operatorname{ord}_{+\infty}(f) \leq 1$ significa che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \ l \neq 0 & \text{se } \operatorname{ord}_{+\infty}(f) = 1 \\ +\infty & \text{se } \operatorname{ord}_{+\infty}(f) < 1 \end{cases}$

In ogni caso esiste $\varepsilon > 0$, $K \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \geq K$ $f(x) > \varepsilon \cdot \frac{1}{x}$ — non è integrabile

quindi f non è integrabile

1) Sia $\alpha > 1$, prendo β con $\alpha > \beta > 1$,

$ord_{+\infty} f > \beta$ strettamente, cioè $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\beta}} = 0$

e quindi esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \geq K$ $\left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\beta}} - 0 \right| < \varepsilon = 1$

$f(x) \leq \frac{1}{x^\beta}$ $\qquad f(x) < \frac{1}{x^\beta}$

$\Downarrow$ è integrabile in senso generalizzato

e quindi lo è anche f.

$\underline{Es}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^3-1}\,dx$?

$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$[1, +\infty[$

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x|\operatorname{sen} x|}{x^3-1}\,dx$ ℓ

$\overset{\shortparallel}{f(x)}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x|\operatorname{sen} x|}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2 - 1/x} = 0$$

$\operatorname{ord}_{+\infty} f = ?$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}|\operatorname{sen} x|}{x^2 - 1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^{1/2} - \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

$\operatorname{ord}_{+\infty} f \geq \frac{3}{2} > 1$

la funzione $\frac{x|\operatorname{sen} x|}{x^3-1}$ è integrabile in senso gen. su $[2, +\infty[$

OSS: $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ loc. integr. e l'idea che $|f|$ sia integrabile in senso gen. su $[a,+\infty[$; allora anche f lo è.

$$\underbrace{|f| = f^+ + f^-} \qquad f = f^+ - f^-$$

$0 \leq f^+ \leq |f| \qquad 0 \leq f^- \leq |f|$ se $|f|$ è integrabile in senso gen., lo sono anche anche f^+ e f^- e per linearità anche $f^+ - f^- = f$.

⚠ Se $|f|$ non è integrabile in senso generalizzato, in generale non implica che f non lo sia!

Es:

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{\sin x}{x}$

f è integrabile in senso generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \sin x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\left[-\cos x \cdot \frac{1}{x}\right]_1^b - \int_1^b -\cos x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \right] =$$

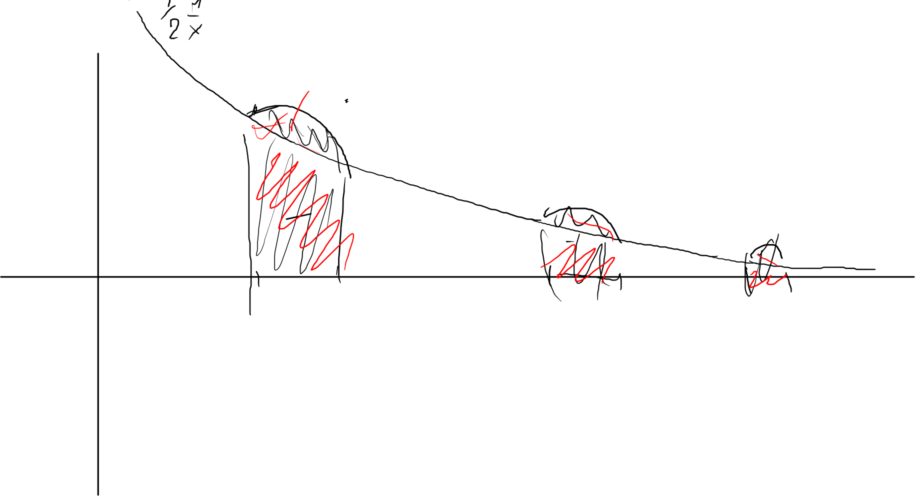
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\underbrace{\cos(1) - \frac{1}{b}\cos(b)}_{\to \cos(1)} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right]$$

esiste finito!

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$ che è integrabile in senso generalizzato

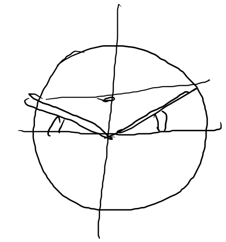
quindi $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ esiste finito //

La funzione $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$ NON è integrabile in senso gen.



$\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$

$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$



$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \geq \frac{1}{2}\frac{1}{x}$

$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

$k \in \mathbb{N}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = +\infty \; !?$$

$$\operatorname{ord}_{+\infty} f > 1$$

$$\frac{\frac{1}{x(\log x)^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{(\log x)^2}$$

$$\| $$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log b} \frac{1}{z^2}\,dz = \lim_{b\to+\infty} \cancel{\left[\log(\log(b)) - \log(\log 2)\right]} = +\infty$$

$$z = \log x$$

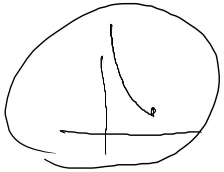
$$dz = \frac{1}{x}\,dx$$

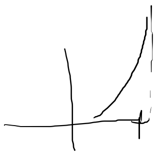
$$\lim\left(-\frac{1}{\log b} + \frac{1}{\log 2}\right) = \frac{1}{\log 2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

Funzioni non limitate su intervalli limitati

$f:]a,b] \to \mathbb{R}$





$[a,b[$

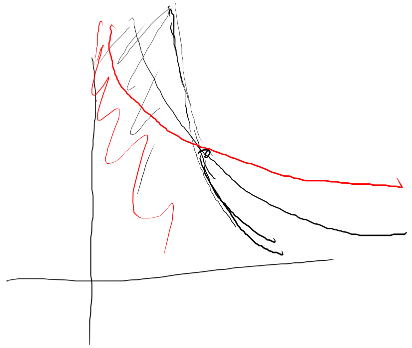
Sia $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ localmente integrabile; scriveremo, se esiste,

$$\int_a^b f\,dm = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f\,dm$$

$$\left[\; [a,b[\qquad \int_a^b f\,dm = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f\,dm \;\right]$$

Se il limite esiste finito diremo che f è integrabile in senso generalizzato su $]a,b]$.

Es: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx =$



caso $\alpha = 1$ $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\log(1) - \log(\varepsilon)\right] = +\infty$

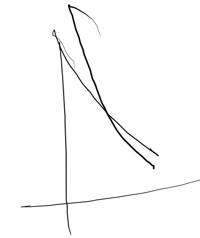
caso $\alpha > 0$ $\alpha \neq 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{1-\alpha} \cdot x^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0<\alpha<1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

OSS Aut out

Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ localmente integrabile e $f(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b]$; allora esiste

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$$



poniamo $\varphi(\varepsilon) = \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$a+\varepsilon_1 < a+\varepsilon_2$

$$\varphi(\varepsilon_2) = \int_{a+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon_2}^{a+\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_1}^{b} f(x)\,dx \leq \varphi(\varepsilon_1)$$

$$\int_{a+\varepsilon_2}^{a+\varepsilon_1} f(x)\,dx = -\int_{[a+\varepsilon_1,\, a+\varepsilon_2]} f(x)\,dx \leq 0$$

$\leq \varphi(\varepsilon_1)$