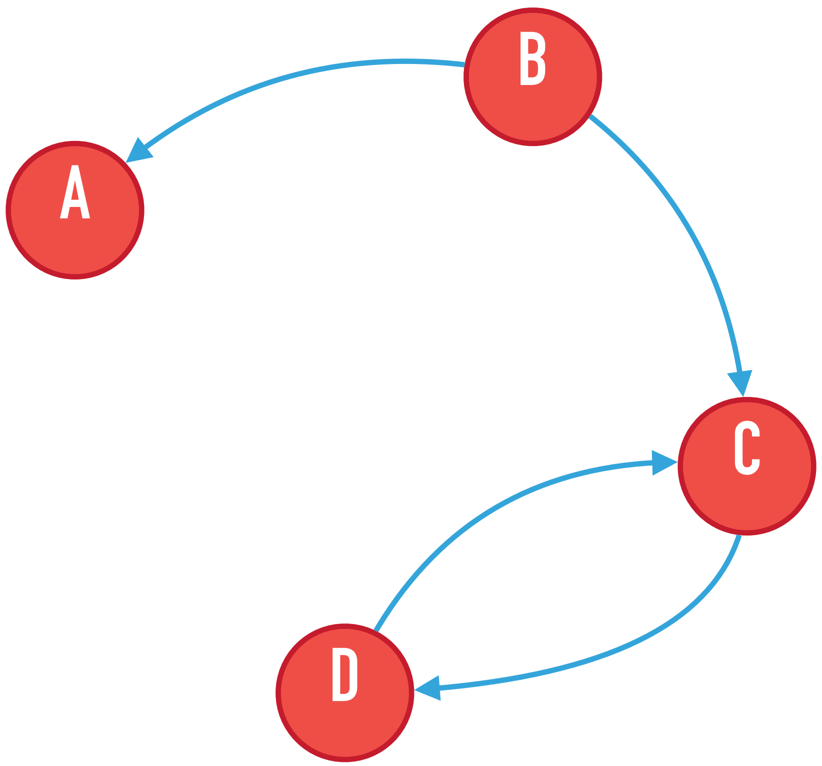
GRAFI
VISITA IN AMPIEZZA

ALGORITMI E STRUTTURE DATI

GRAFI: NOZIONI DI BASE

COSA È UN GRAFO?



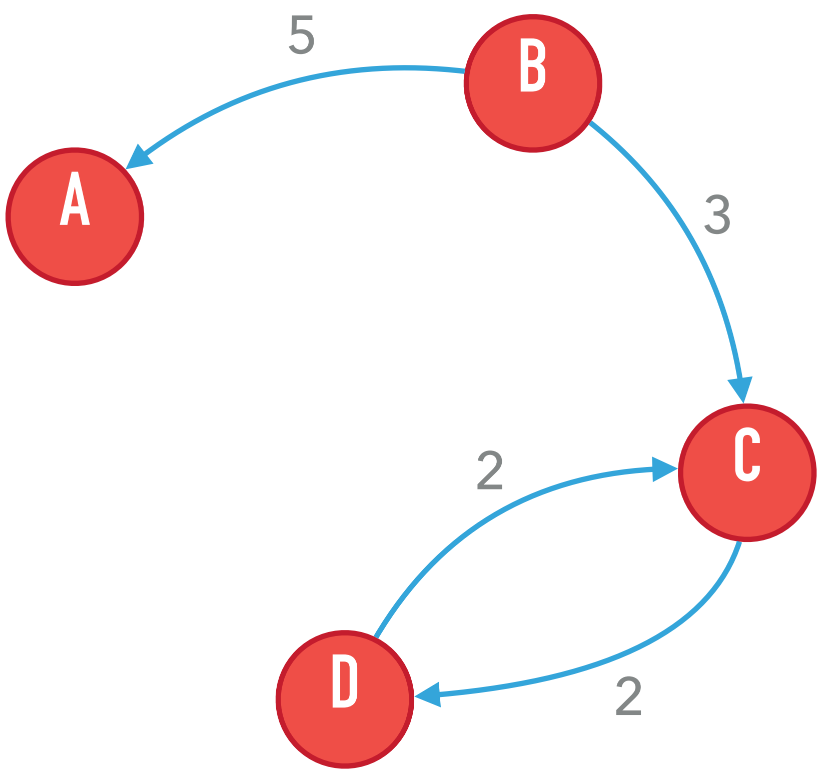
Insieme di nodi:

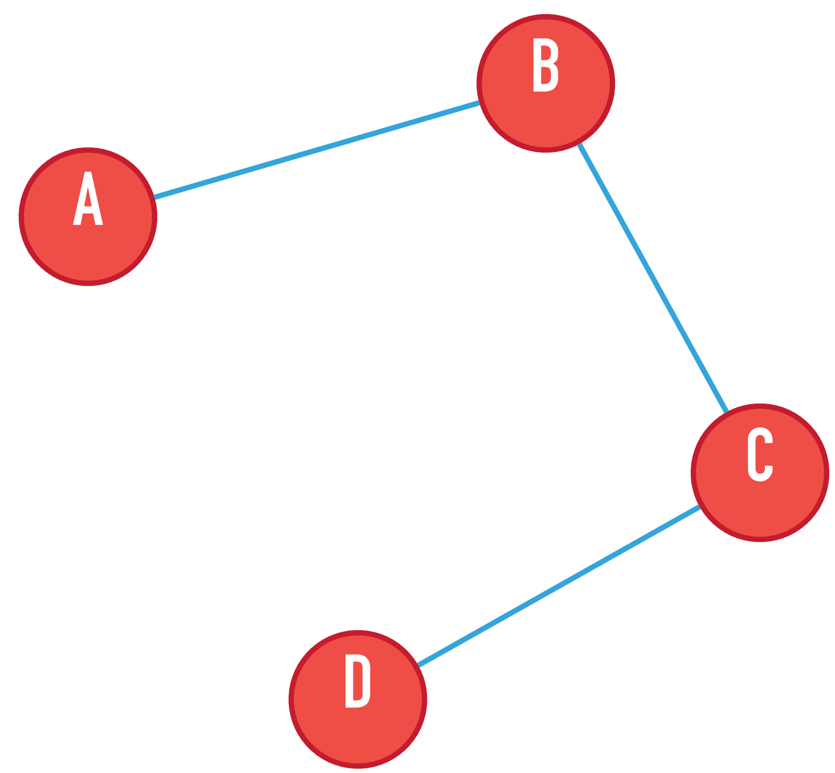
$$V = \{a, b, c, d\}$$

Insieme di archi:

$$E = \{(b, a), (b, c), \\ (c, d), (d, c)\}$$

COSA È UN GRAFO (VARIANTI)?





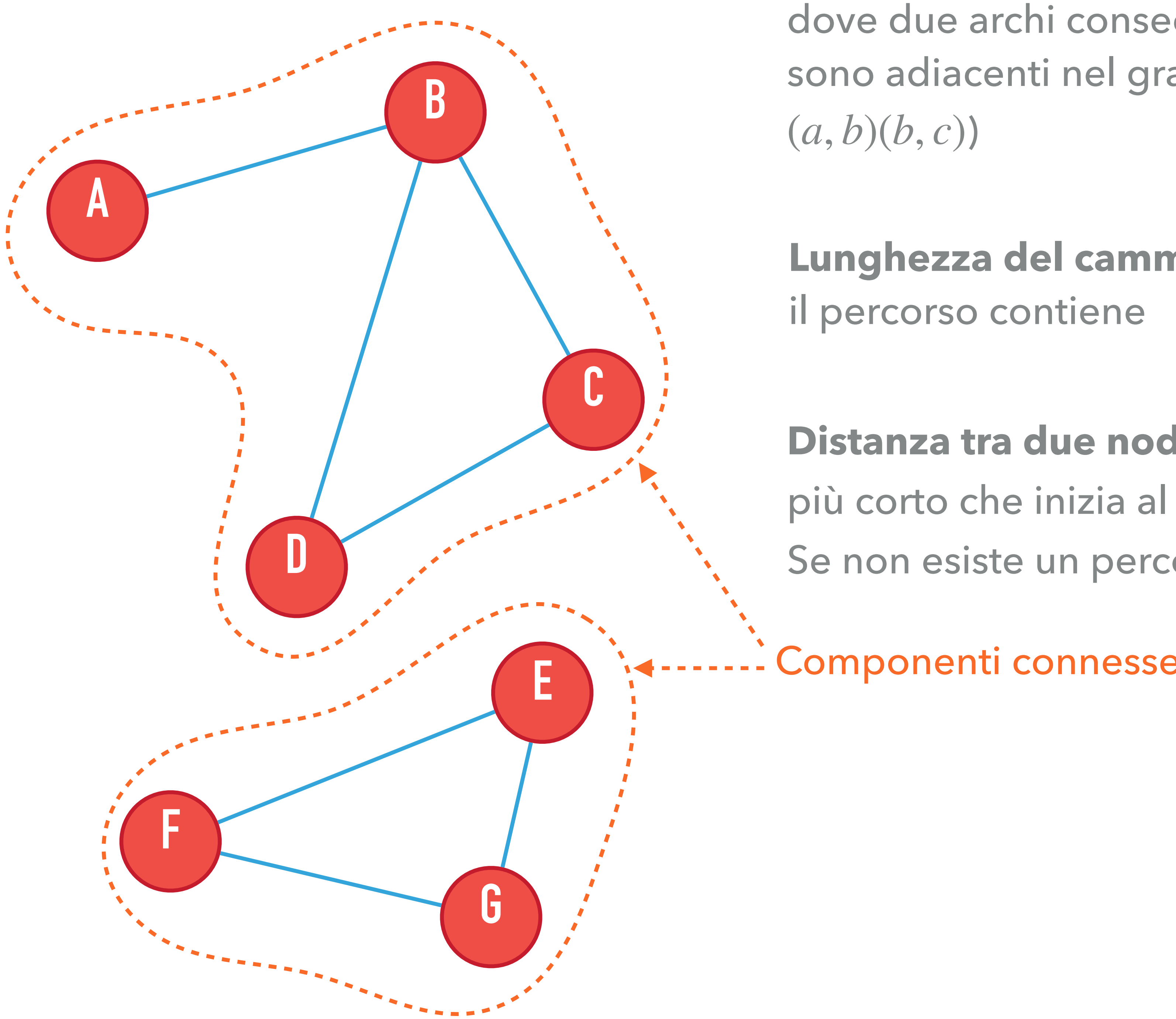
Archi pesati

Ovvero esiste una funzione $w : E \to \mathbb{R}$
e indichiamo $w((i, j))$ come $w_{i,j}$

Non orientato

Ovvero $(a, b) \in E \iff (b, a) \in E$
per ogni $a, b \in V$

GRAFI: NOZIONI DI BASE



Cammino o Percorso: sequenza di archi $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots$ dove due archi consecutivi nella sequenza sono adiacenti nel grafo (i.e., sono nella forma $(a, b)(b, c)$)

Lunghezza del cammino: numero di archi che il percorso contiene

Distanza tra due nodi a e b: lunghezza del cammino più corto che inizia al nodo a e termina al nodo b. Se non esiste un percorso diremo che la distanza è $+\infty$

NOTAZIONE

- Dato un grafo $G = (V, E)$ solitamente l'input viene misurato in modi dipendente da $|V|$ e $|E|$, quindi due parametri e non uno
- All'interno della notazione asintotica (e solo in quel caso) faremo la semplificazione di utilizzare V e E per indicare $|V|$ e $|E|$.
- Quindi un algoritmo che richiede tempo $O(V + E)$ è da leggersi come $O(|V| + |E|)$

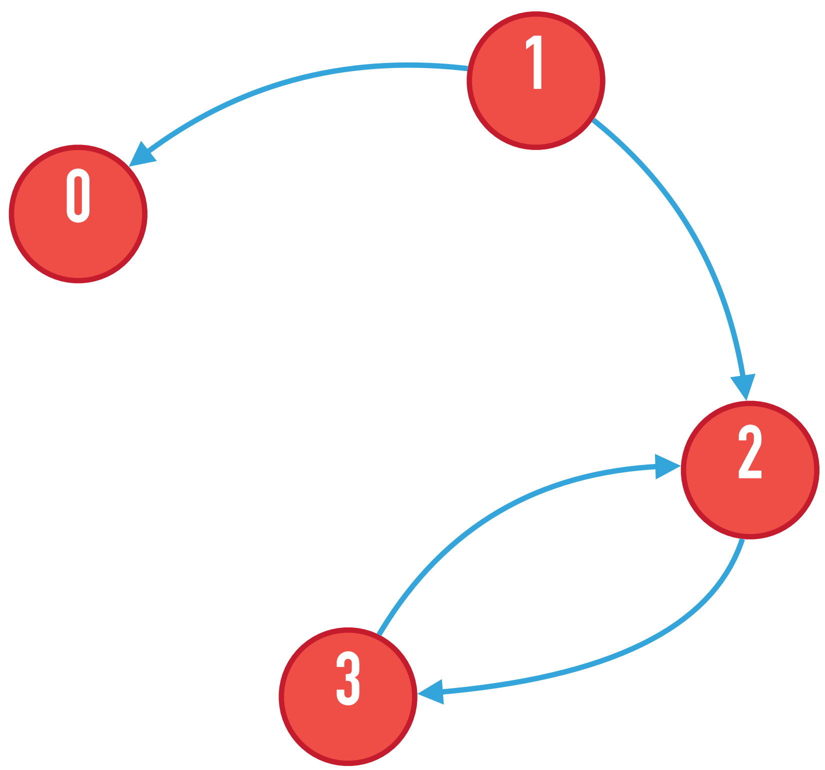
NOTAZIONE

- Un grafo può avere al più $O(V^2)$ archi, con il valore esatto che dipende dal fatto che il grafo sia non diretto o diretto
- Solitamente un grafo con un numero di archi vicino al massimo possibile viene detto **denso** mentre uno con un pochi archi viene detto **sparso**.
- Cosa effettivamente sia considerato un grafo denso o sparso dipende molto dall'applicazione

COSA DOBBIAMO GESTIRE?

- Dobbiamo essere in grado di salvare i nodi…
- …e gli archi (eventualmente con un peso).
- Assumiamo che i nodi abbiano nomi {0,…,n-1}
- Ci sono due modi "standard" di rappresentare un grafo:
  - Matrici di adiacenza
  - Liste di adiacenza
- Assumiamo che il grafo sia statico (i.e., non cambi nel tempo)

MATRICI DI ADIACENZA



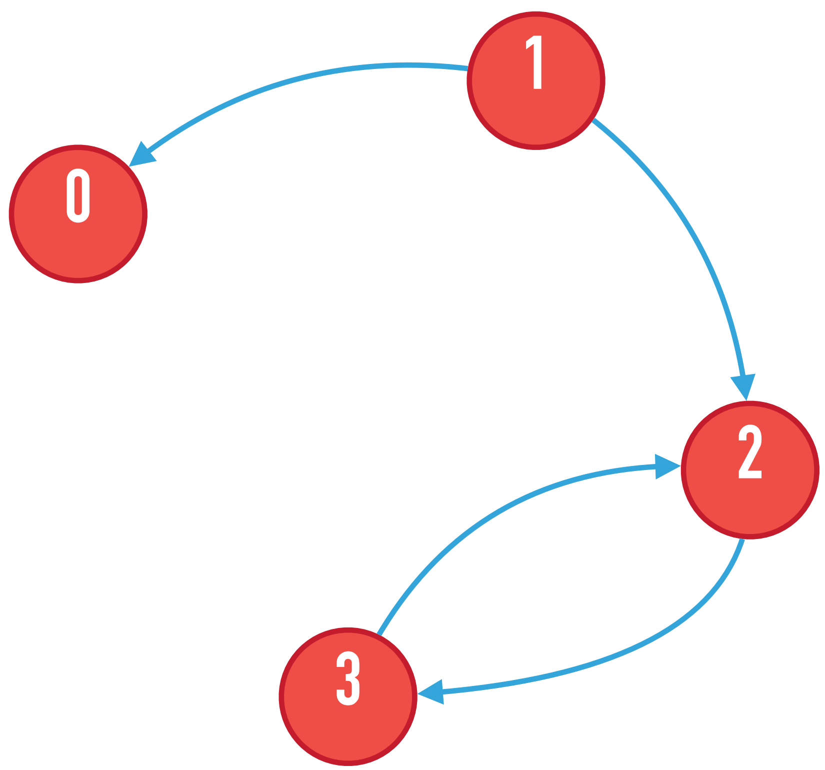
Destinazione

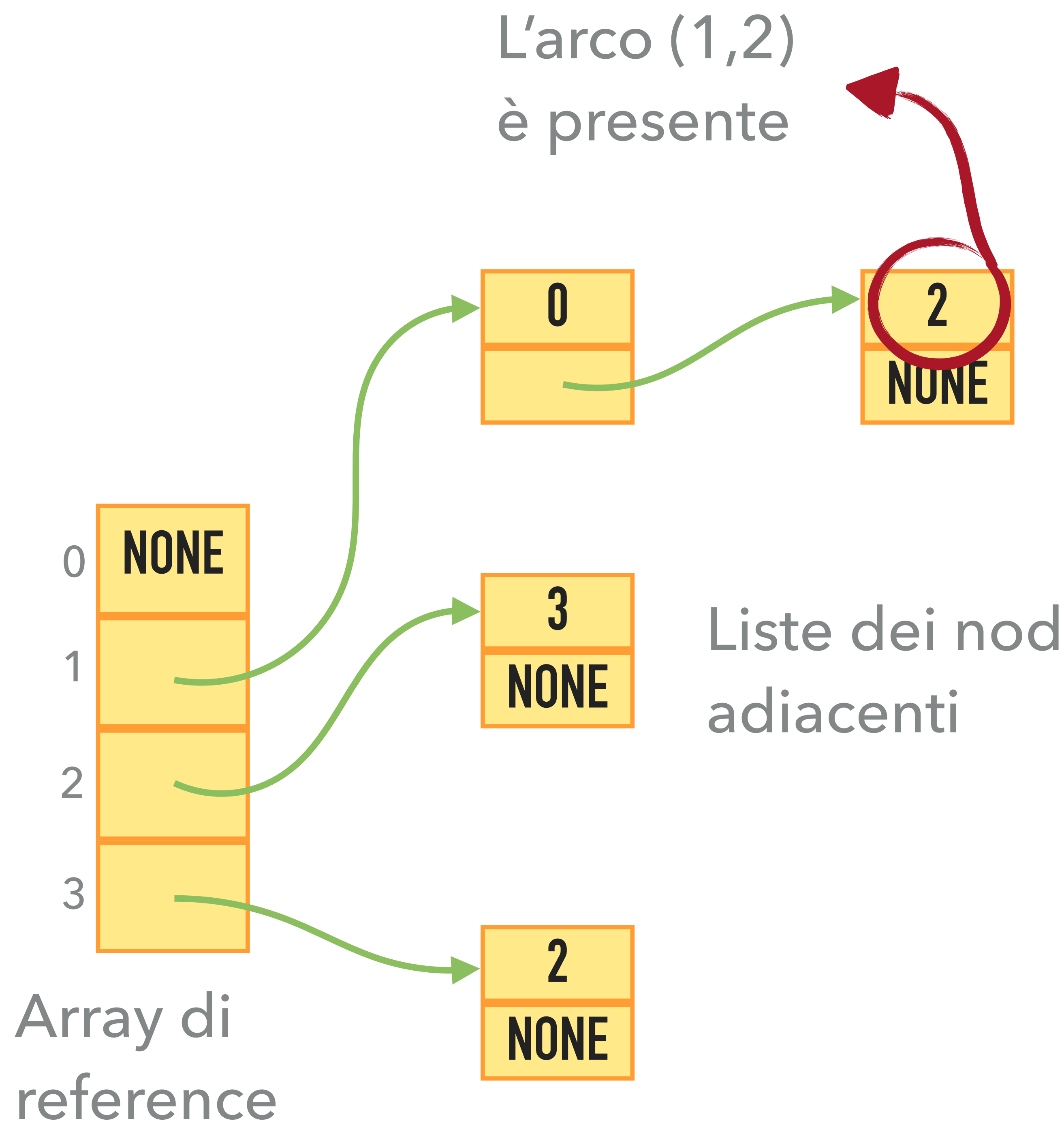
Sorgente

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0

L’arco (1,0) è presente

LISTE DI ADIACENZA





QUALE RAPPRESENTAZIONE USARE

Matrici di adiacenza	**Liste di adiacenza**
Veloce (tempo costante) stabilire se un arco esiste	Lento (serve scandire una lista) stabilire se un arco esiste
Occupazione quadratica di memoria rispetto al numero di vertici $O(V^2)$	Occupazione lineare di memoria rispetto al numero di vertici e archi $O(V+E)$
Funziona bene per grafi densi	Funziona bene per grafi sparsi

VISITA IN AMPIEZZA

RICERCA IN AMPIEZZA

- La visita o ricerca in ampiezza (breadth-first search o BFS) è uno degli algoritmi di base per la ricerca su grafi
- Dato un grafo $G = (V, E)$ e un nodo $s \in V$ detto nodo sorgente la ricerca in ampiezza esplora tutti i nodi raggiungibili a partire da s individuando:
  - La distanza da s a ognuno dei vertici raggiungibili
  - Un albero (detto albero BFS) che contiene tutti i vertici raggiungibili

RICERCA IN AMPIEZZA

- Perché ricerca in ampiezza?
- A partire dal nodo s si esplorano prima tutti i nodi direttamente raggiungibili da s (quelli a distanza 1)
- Poi tutti i nodi raggiungibili in due passi (distanza 2), etc.
- Quindi prima di allontanarci dal nodo sorgente esploriamo tutti quelli vicini, poi i lori vicini, etc.

AMPIEZZA VS PROFONDITÀ

Ricerca in ampiezza:
esploriamo tutti nodi vicini prima di allontanarci

Ricerca in profondità:
seguiamo un singolo percorso il più possibile prima di cambiare strada

COLORARE I NODI

- Durante la ricerca in ampiezza (e in generale per le ricerche nei grafi) dobbiamo evitare di visitare un nodo più volte. Per questo assegnamo ad ogni nodo un colore:
- **Bianco**: il nodo non è ancora stato visitato
- **Grigio**: il nodo è stato visitato ma potrebbe avere dei vicini non visitati
- **Nero**: il nodo è stato visitato ed anche tutti i suoi vicini

IDEA DELL'ALGORITMO

- Teniamo una coda di nodi grigi (dei quali potrebbero mancarci dei vicini da esplorare)
- Inizialmente solo il nodo sorgente è grigio e viene accodato
- Estraiamo un nodo dalla coda, coloriamo di grigio tutti i vicini bianchi e li aggiungiamo in coda
- Ripetiamo finché la coda non è vuota

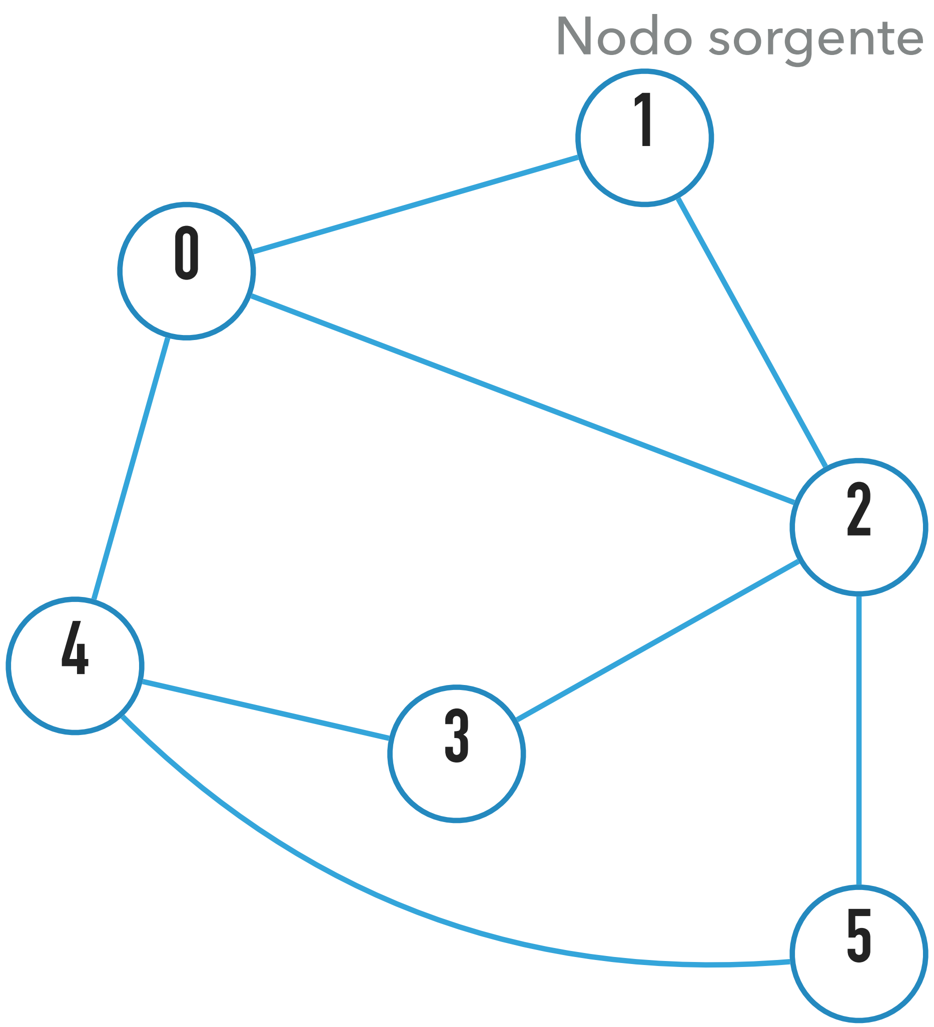
PSEUDOCODICE: INIZIALIZZAZIONE

```
Parametri: grafo G, nodo sorgente s
# inizialmente impostiamo distanza, colore e predecessore di tutti i nodi
for all v ∈ V:
    colore[v] = bianco
    distanza[v] = +∞
    predecessore[v] = None
# il nodo sorgente è il primo che visitiamo e quindi
colore[s] = grigio # assume colore grigio
distanza[s] = 0 # e distanza 0 da sé stesso
Q = Coda()
# nella coda dei nodi che potrebbero avere ancora vicini da visitare
# viene aggiunto s
enqueue(Q, s)
```

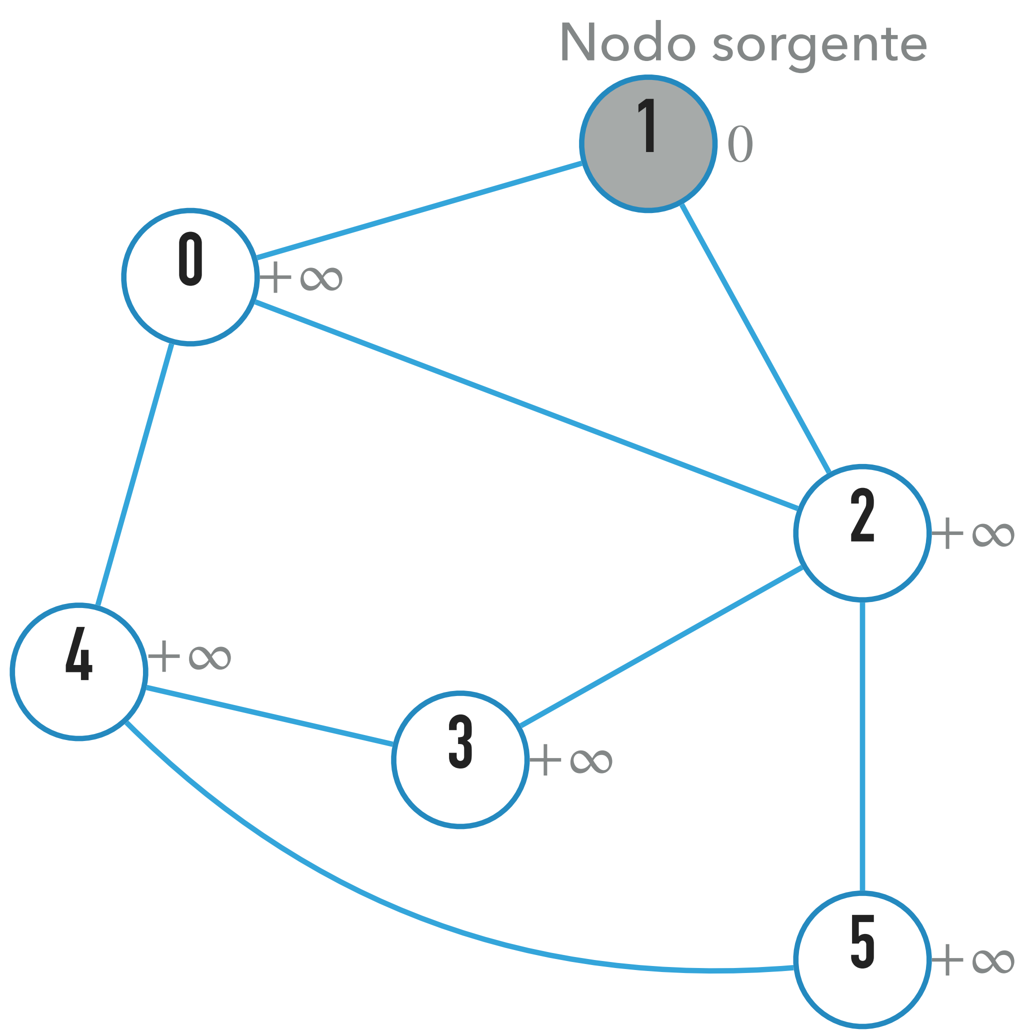
PSEUDOCODICE: CICLO PRINCIPALE

```
while Q is not empty:
    # questo ciclo deve continuare finché ci rimangono dei nodi da visitare
    u = dequeue(Q) # prendiamo il primo nodo dalla coda
    for all v adiacenti a u # e ne esploriamo tutti i vicini
        if color[v] == bianco # consideriamo solo i vicini mai visitati prima
            colore[v] = grigio
            # possiamo arrivare a v con un passo partendo da u
            distanza[v] = distanza[u] + 1
            predecessore[v] = u
            enqueue(Q, v) # accodiamo perché potrebbe avere dei vicini bianchi
    colore[u] = nero # abbiamo finito di visitare tutti i vicini di u
# una volta usciti dal ciclo abbiamo visitato tutti i nodi raggiungibili da s
```

ESEMPIO DI ESECUZIONE



ESEMPIO DI ESECUZIONE



Coda dei nodi da visitare

Inizialmente la distanza conosciuta di tutti i nodi dal nodo di partenza è $+\infty$

Solo il nodo iniziale ha distanza 0 da se stesso e colore grigio

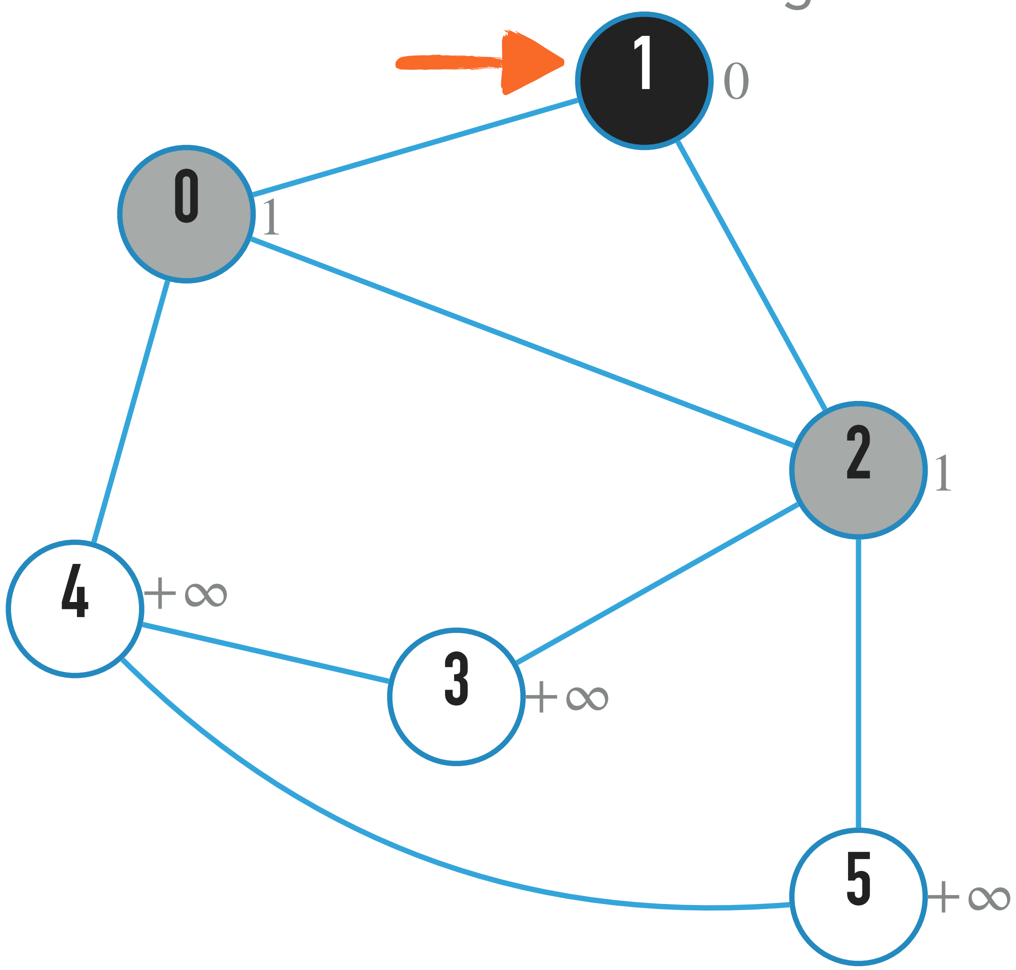
	0	1	2	3	4	5
Distanza	∞	0	∞	∞	∞	∞

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	-	-	-	-	-	-

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Coda dei nodi da visitare

Nodo sorgente



Estraiamo il nodo u dalla coda

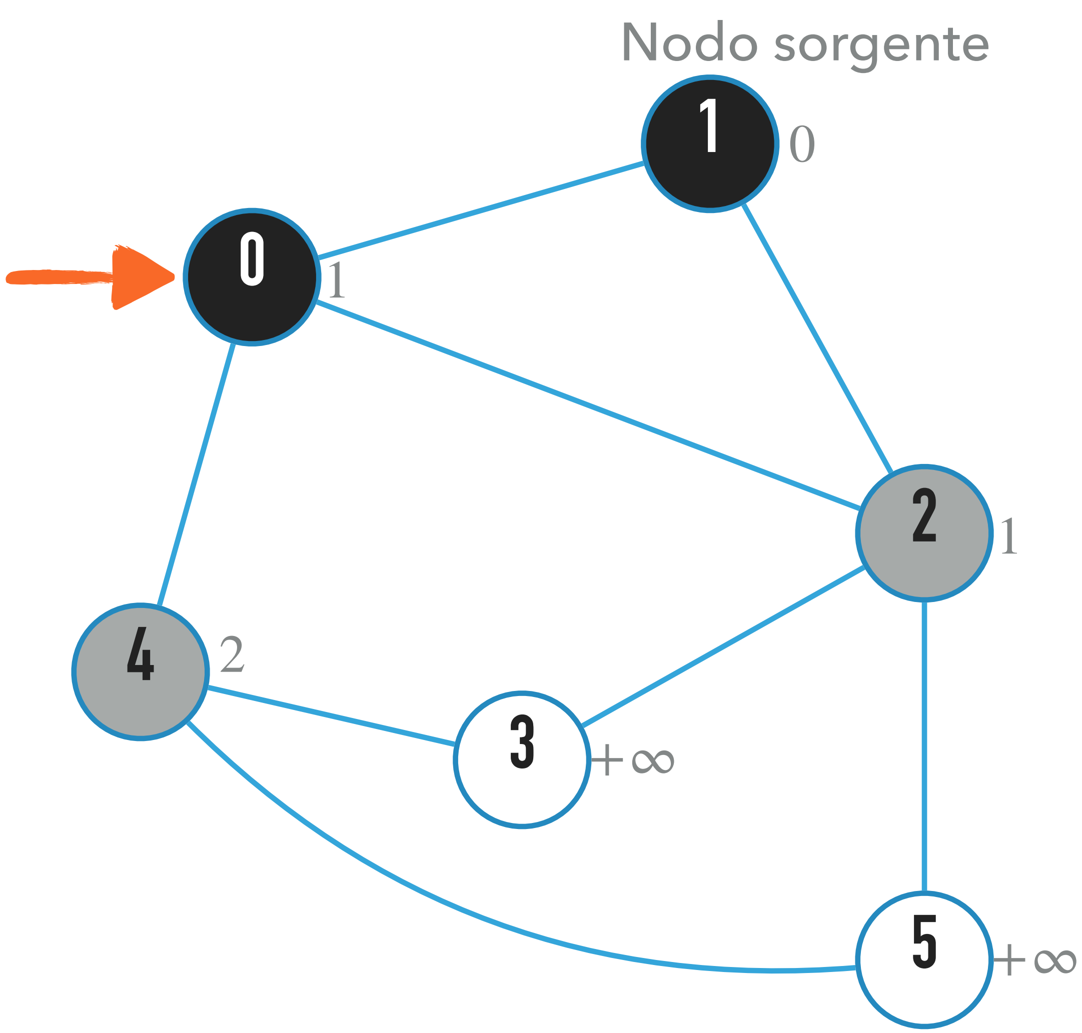
Per ogni vicino, se è bianco lo coloriamo di grigio, aggiorniamo distanza (come distanza$[u] + 1$) e precedessore (u) e lo accodiamo

Coloriamo u di nero

	0	1	2	3	4	5
Distanza	1	0	1	∞	∞	∞

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	1	-	1	-	-	-

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Coda dei nodi da visitare

Estraiamo il nodo u dalla coda

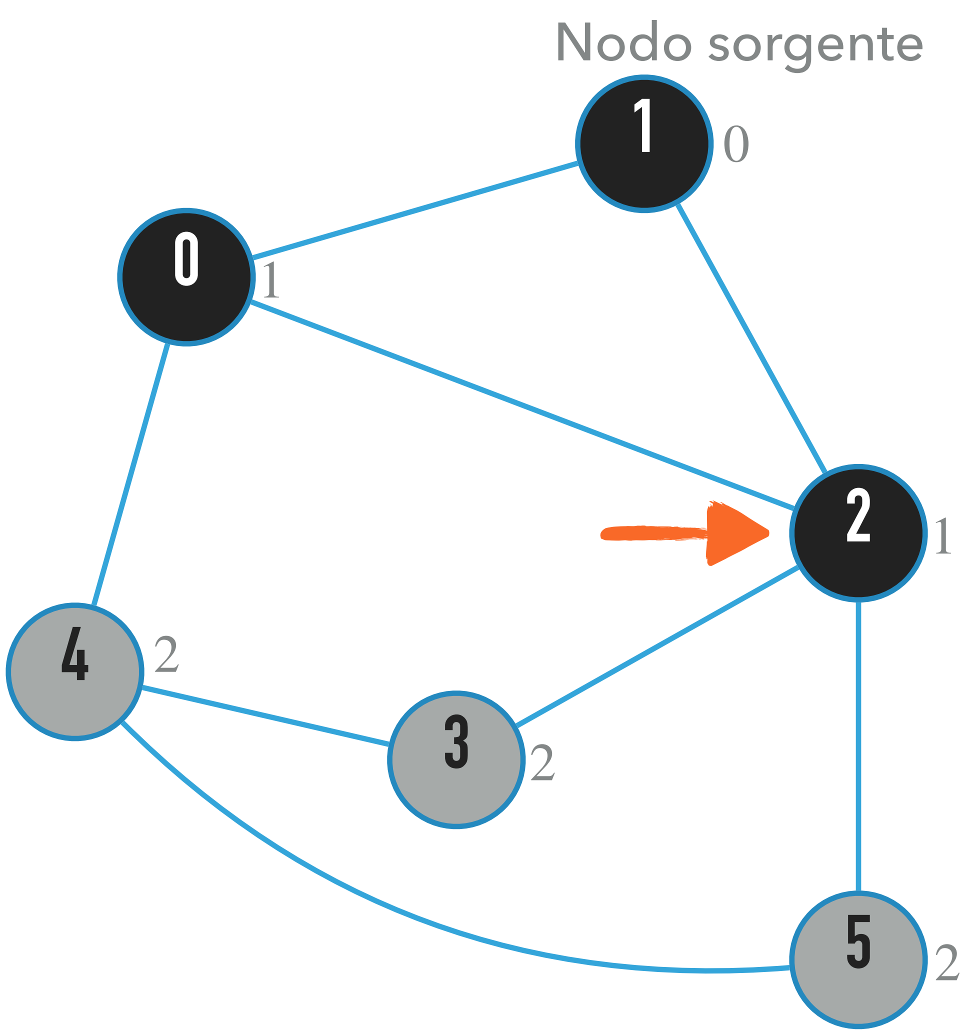
Per ogni vicino, se è bianco lo coloriamo di grigio, aggiorniamo distanza (come distanza$[u] + 1$) e precedessore (u) e lo accodiamo

Coloriamo u di nero

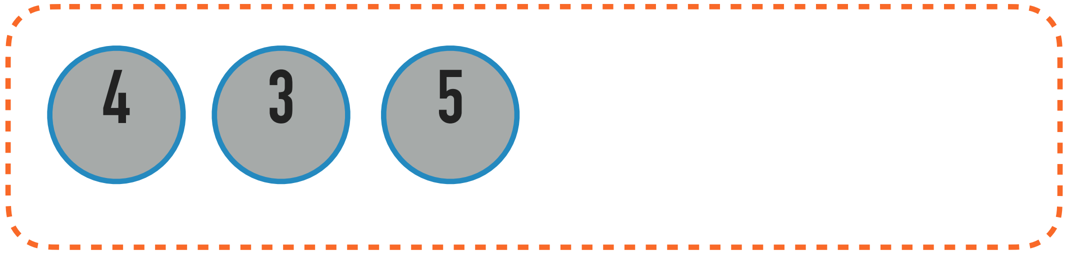
	0	1	2	3	4	5
Distanza	1	0	1	∞	2	∞

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	1	-	1	-	0	-

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Coda dei nodi da visitare



Estraiamo il nodo u dalla coda

Per ogni vicino, se è bianco lo coloriamo di grigio, aggiorniamo distanza (come distanza$[u]+1$) e precedessore (u) e lo accodiamo

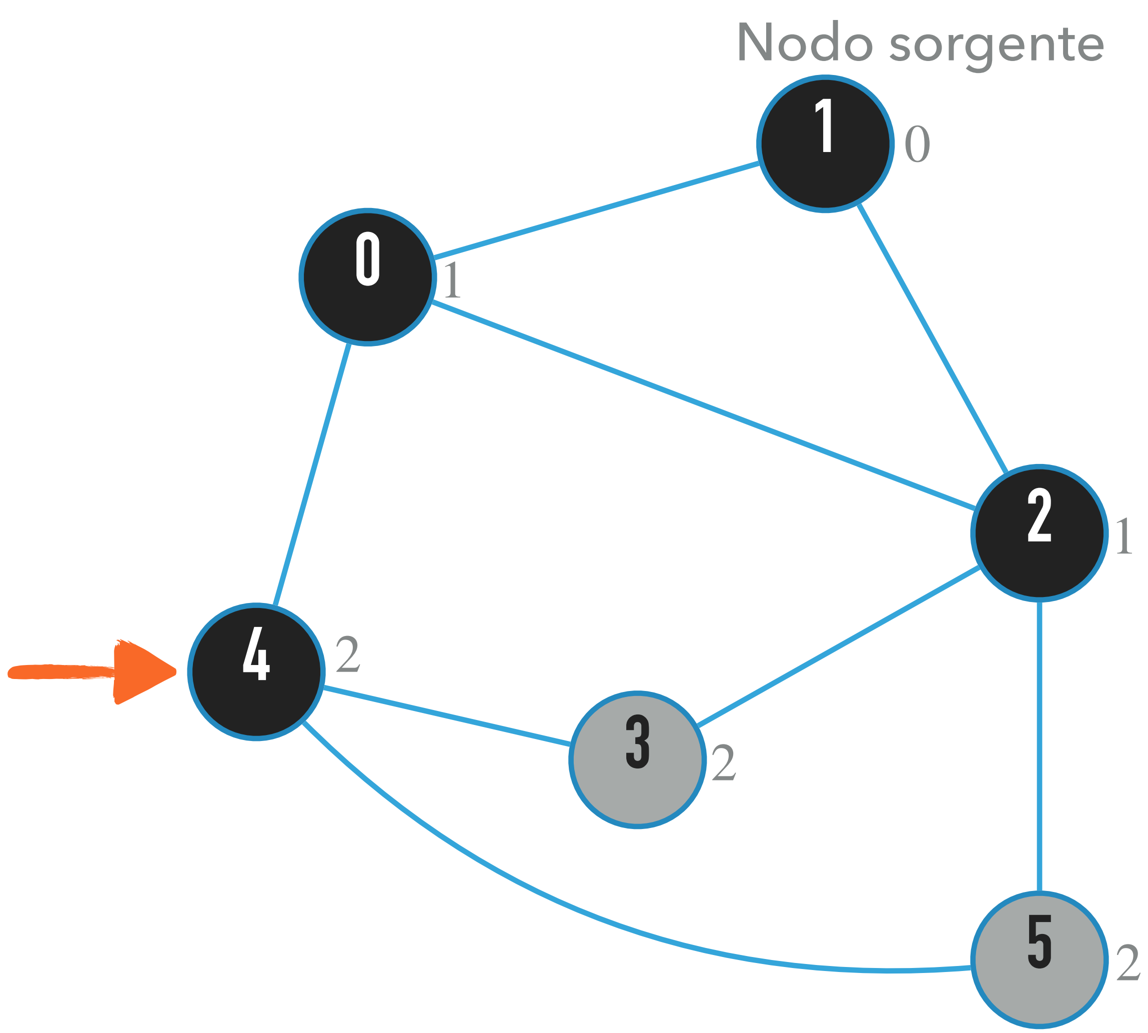
Coloriamo u di nero

	0	1	2	3	4	5
Distanza	1	0	1	2	2	2

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	1	-	1	2	0	2

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Coda dei nodi da visitare



Estraiamo il nodo u dalla coda

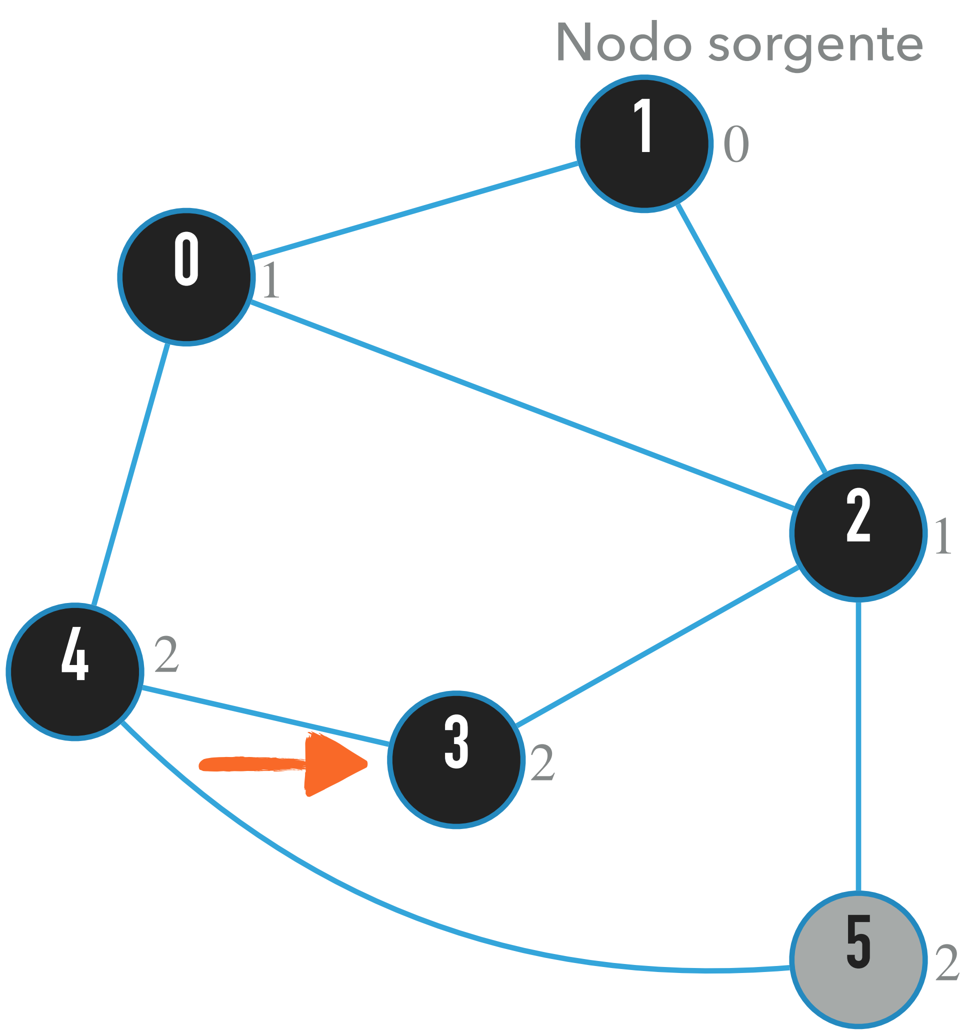
Per ogni vicino, se è bianco lo coloriamo di grigio, aggiorniamo distanza (come distanza$[u] + 1$) e precedessore (u) e lo accodiamo

Coloriamo u di nero

	0	1	2	3	4	5
Distanza	1	0	1	2	2	2

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	1	-	1	2	0	2

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Coda dei nodi da visitare

Estraiamo il nodo u dalla coda

Per ogni vicino, se è bianco lo coloriamo di grigio, aggiorniamo distanza (come distanza$[u] + 1$) e predecessore (u) e lo accodiamo

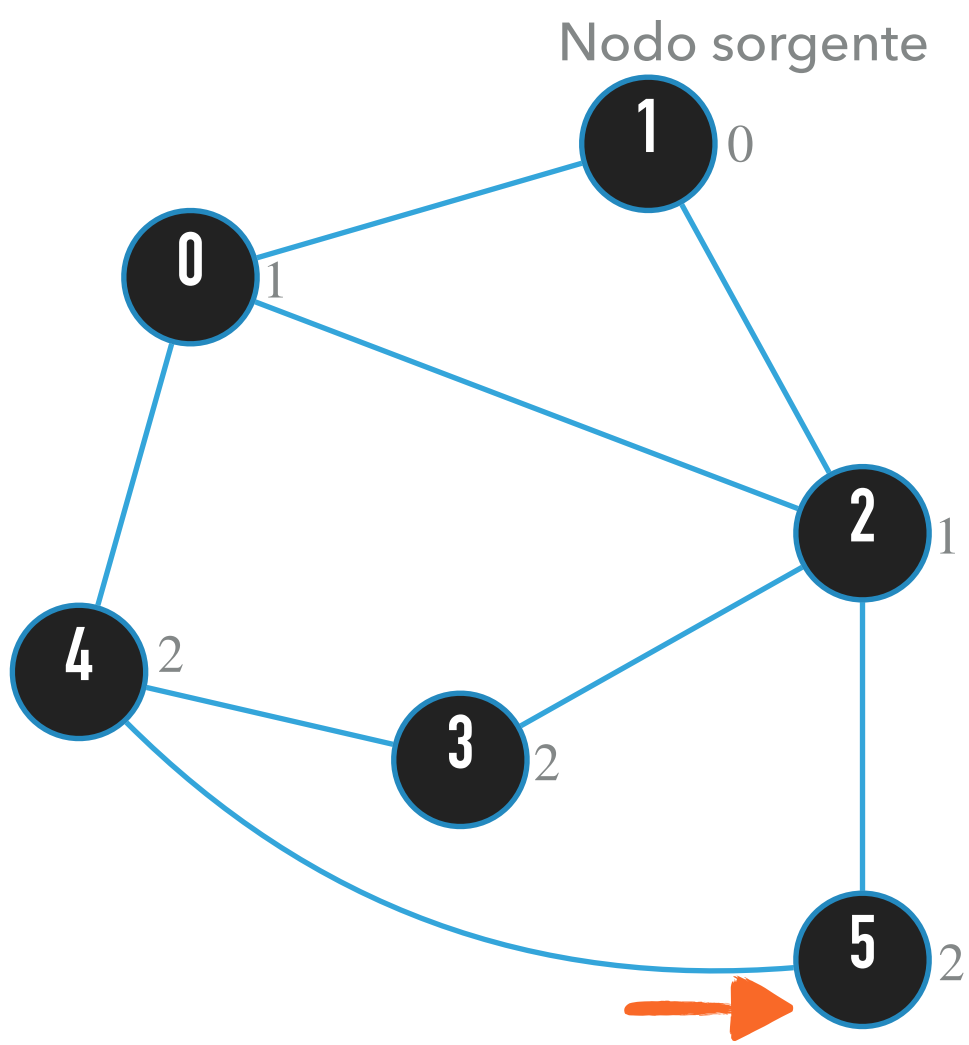
Coloriamo u di nero

	0	1	2	3	4	5
Distanza	1	0	1	2	2	2

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	1	-	1	2	0	2

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Coda dei nodi da visitare



Estraiamo il nodo u dalla coda

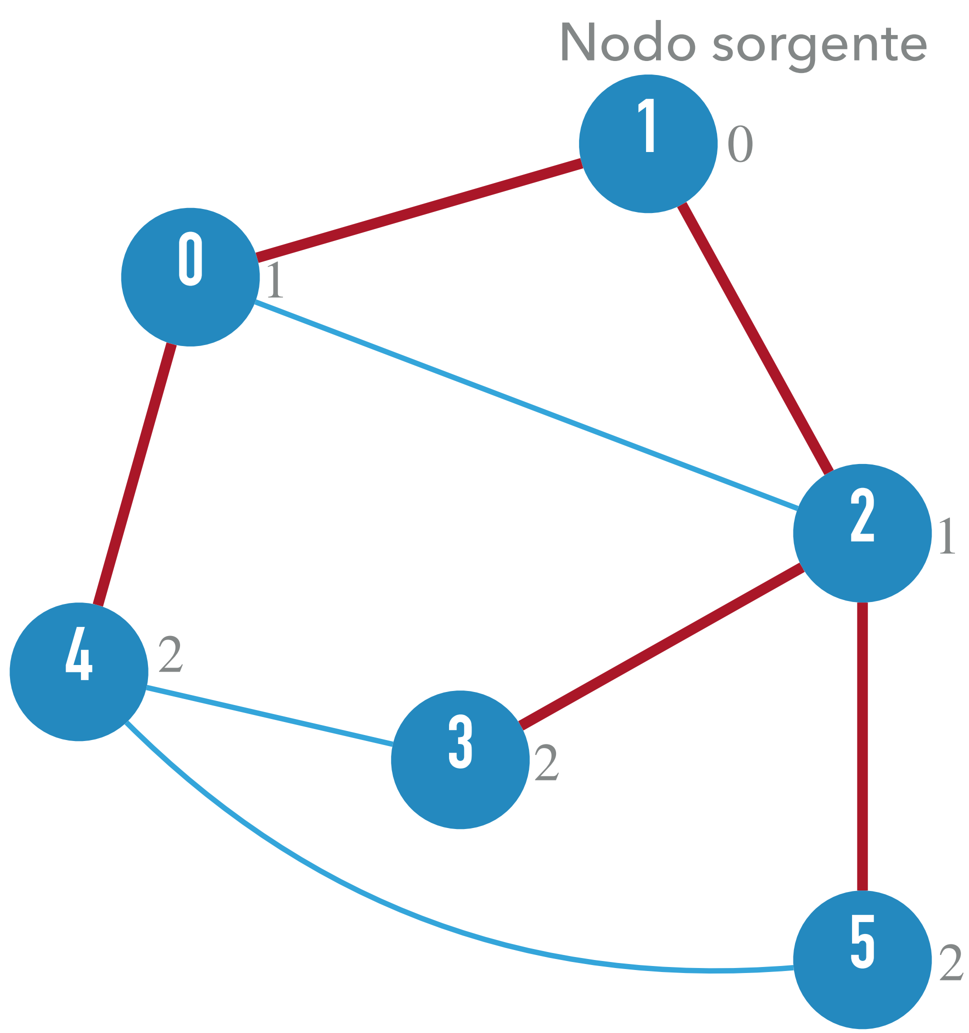
Per ogni vicino, se è bianco lo coloriamo di grigio, aggiorniamo distanza (come distanza$[u] + 1$) e precedessore (u) e lo accodiamo

Coloriamo u di nero

	0	1	2	3	4	5
Distanza	1	0	1	2	2	2

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	1	-	1	2	0	2

COSA ABBIAMO OTTENUTO?



	0	1	2	3	4	5
Distanza	1	0	1	2	2	2

	0	1	2	3	4	5
Predecessore	1	-	1	2	0	2

In aggiunta alla distanza, l'array dei predecessori ci permette di ottenere un albero (non necessariamente binario) che è un sottografo del grafo di partenza, detto *albero BFS* (*BFS tree*)

Per ogni nodo v, l'albero ha un unico percorso dal nodo sorgente a v e questo è un percorso di lunghezza minima

ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- Assumiamo di utilizzare liste di adiacenza per rappresentare il grafo $G = (V, E)$
- Le operazioni di inserimento e rimozione dalla coda richiedono $O(1)$
- Notiamo che ogni nodo può venire accodato al più una volta, perché deve passare da bianco a grigio prima di venire accodato e non tornerà mai più bianco, quindi il ciclo while esegue $O(V)$ volte

ANALISI DELLA COMPLESSITÀ

- Il ciclo for che itera su tutti i vicini di un nodo è trattabile in un modo un poco particolare. Invece di vedere una singola esecuzione, vediamo il numero totale di volte che viene eseguito
- Questo numero dipende dal numero di archi del grafo (per andare da un nodo al suo vicino ci serve un arco), quindi è limitato da $O(E)$
- Il tempo totale di esecuzione è quindi $O(V + E)$

CORRETTEZZA

- Sia d[u] = distanza[u] il risultato di BFS. Vogliamo dimostrare che
$d[u] = \delta(s, u)$, la distanza in G.
- Vogliamo anche dimostrare che $\pi[u]$, il predecessore di u in BFS, sia un vertice in un cammino minino da s a u.
- Vogliamo infine dimostrare che BFS scopre tutti e soli i vertici raggiungibili da s

CORRETTEZZA

- Lemma: Se $(u, v) \in E$, allora $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$
- Lemma: Alla fine di BFS, vale che $d[u] \geq \delta(s, u)$
- Dimostrazione: per induzione sul numero di operazioni e di inserimento nella coda Q.
  - Caso base: si ha quando si inserisce s.
  - Passo induttivo: consideriamo il nodo w mentre esaminiamo (u,w)

CORRETTEZZA

- Lemma: durante BFS, sia $Q = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ la coda in un qualche passo dell'algoritmo. Allora vale:
  - $d[v_r] \leq d[v_1] + 1$
  - $\forall i, d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$
- Dimostrazione per induzione sul numero di operazioni sulla coda.

CORRETTEZZA

- Teorema: correttezza di BFS. Dopo l'esecuzione di BFS:
  - $\forall v \in V, d[v] = \delta(s, v)$
  - Se $d[v] < \infty$, uno dei cammini minimi tra s e v passa per $\pi[v]$

CORRETTEZZA

- Dimostrazione: per assurdo.
- Sia v il vertice con $\delta(s, v)$ minimo tale che $d[v] > \delta(s, v)$, ovvero che viola il teorema.
- Necessariamente $\delta(s, v) < \infty$ in quanto vale sempre che $d[v] \geq \delta(s, v)$ e $\delta(s, v) = \infty$ implicherebbe $d[v] = \delta(s, v)$
- Sia u un vertice che precede v in un cammino minimo da s, allora $d[v] > \delta(s, v) = \delta(s, u) + 1 = d[u] + 1$ per la scelta di v minimale rispetto a $\delta(s, v)$

CORRETTEZZA

- Consideriamo l'istante in cui u viene rimosso dalla coda, ed il clore di v in quell'istante.
  - Se v è bianco, allora diventa grigio esaminando u, e quindi $d[v] = d[u] + 1$, contraddizione.
  - Se v è grigio, allora è nella coda quando rimuovo u e quindi $d[v] \leq d[u] + 1$, contraddizione.
  - Se v è nero, allora è è già stato esaminato prima di u e quindi $d[v] \leq d[u]$, contraddizione.
- Segue che un tale v non può esistere ed il teorema vale.