

# Geometria 1

## Foglio di esercizi 8

Anno accademico 2021-2022

11/12/2021

- 1) Consideriamo i vettori  $v_1 = (1, -1, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ , e i vettori  $w_1 = (1, -2), w_2 = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$ . Dimostrare che  $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$  è base per  $\mathbb{R}^3$  e che  $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$  è base per  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare t. c.  $f(v_1) = w_1, f(v_2) = f(v_3) = w_2$ .
- (a) Determinare, in entrambi i casi, le matrici del cambiamento di base rispetto alla base canonica.
  - (b) Scrivere le matrici di  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$ , e rispetto alle basi canoniche.
  - (c) Determinare  $\dim \ker(f), \operatorname{rg}(f), \ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .
  - (d) Determinare basi di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$  rispetto alle quali la matrice di  $f$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) Risolvere il sistema seguente al variare di  $t \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + tx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -t \end{cases}$$

- 3) Calcolare  $\operatorname{rg} A(t)$  al variare di  $t \in \mathbb{C}$ , dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 1 & -t & 2t \\ 0 & 1+t & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare  $A(0)^{-1}$ .