

Geometria 1

Foglio di esercizi 8

Anno accademico 2021-2022

11/12/2021

- 1) Consideriamo i vettori $v_1 = (1, -1, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$, e i vettori $w_1 = (1, -2), w_2 = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ è base per \mathbb{R}^3 e che $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$ è base per \mathbb{R}^2 . Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare t. c. $f(v_1) = w_1, f(v_2) = f(v_3) = w_2$.
- (a) Determinare, in entrambi i casi, le matrici del cambiamento di base rispetto alla base canonica.
 - (b) Scrivere le matrici di f rispetto alle basi \mathcal{V} e \mathcal{W} , e rispetto alle basi canoniche.
 - (c) Determinare $\dim \ker(f), \operatorname{rg}(f), \ker f$ e $\operatorname{im} f$.
 - (d) Determinare basi di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 rispetto alle quali la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) Risolvere il sistema seguente al variare di $t \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + tx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -t \end{cases}$$

- 3) Calcolare $\operatorname{rg} A(t)$ al variare di $t \in \mathbb{C}$, dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 1 & -t & 2t \\ 0 & 1+t & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare $A(0)^{-1}$.