ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 8

Trieste, 12 dicembre 2021

1. (i) Sia $V = K[t]$ il K-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti nel campo K. Sia $\mathcal{B}$ la sua base (infinita) formata dai polinomi $v_i := t^i, i \in \mathbb{N}$. Siano v_i^* le forme lineari duali su V definite da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker). Dimostrare che tali forme lineari non generano lo spazio vettoriale duale V^* trovando esplicitamente una forma lineare su V che non appartiene al sottospazio generato dai v_i^*. (Suggerimento: considerare l'applicazione lineare f definita da $f(v_i) = 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$...)

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ formata da $(1,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, e $\mathcal{B}'$ da $(1,0),(1,1)$.

3. Calcolare il determinante della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

4. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$
(Suggerimento: usare opportune trasformazioni elementari...)

5. Calcolare il determinante di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

6. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che
$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ -1 & \pi & 2 \\ \sqrt{2} & 7 & 333 \end{pmatrix} = 1.$$
Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+\pi & c+2 \\ \sqrt{2}+1 & 7-\pi & 331 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -1/2 & \pi/2 & 1 \\ \sqrt{2}/3 & 7/3 & 111 \end{pmatrix}.$$
(Usare le proprietà dei determinanti...)