

Macchine sincrone a magneti permanenti e a riluttanza

Come visto nella parte introduttiva e con riferimento alla Fig. 1, il magnete permanente è un materiale ferromagnetico «duro», cioè per il quale il **ciclo di isteresi** è particolarmente «largo», ovvero caratterizzato da elevati valori di **induzione residua** B_r e **campo coercitivo** H_c .

Prima della magnetizzazione, il materiale «vergine» è caratterizzato da $H=0$ e $B=0$, cioè il suo «punto di lavoro» nel piano BH coincide con l'origine degli assi.

Il processo di magnetizzazione prevede l'applicazione, mediante opportune bobine, di un campo magnetico progressivamente più alto, diretto nel senso in cui si vuole magnetizzare il materiale.

Per effetto del campo magnetizzante, il punto di lavoro si sposta lungo la **curva di prima magnetizzazione** finché la corrente magnetizzante è tale da portare il materiale in saturazione magnetica, cioè oltre il **ginocchio di saturazione**. A questo punto il campo magnetizzante viene diminuito, riducendo la corrente nelle bobine di magnetizzazione. Il campo H di conseguenza si riduce e, per il fenomeno di isteresi magnetica, il punto di lavoro non segue più la curva di prima magnetizzazione, ma si sposta lungo il ciclo di isteresi, in particolare lungo il tratto rettilineo CF che delimita superiormente il ciclo di isteresi. Questo tratto rettilineo viene detto **retta di lavoro** in quanto il punto di lavoro del materiale, una volta inserito nella macchina, dovrà spostarsi lungo la retta stessa.

Si osserva, in particolare, che quando il processo di magnetizzazione si conclude e la corrente magnetizzante viene annullata ($H=0$), l'induzione nel magnete assume il valore B_r detto **induzione residua**.

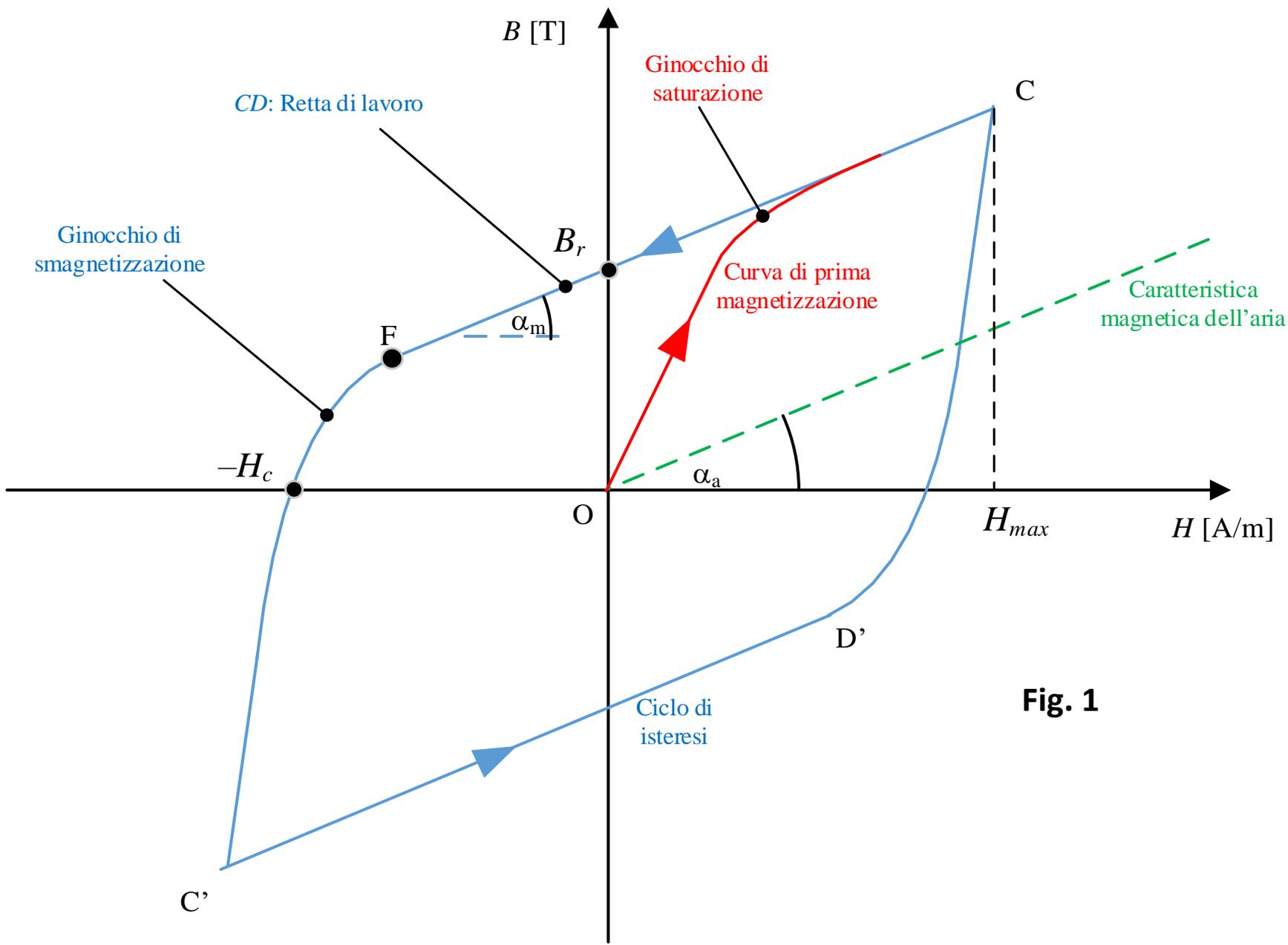


Fig. 1

Sempre in Fig. 1, oltre al ciclo di isteresi si è rappresentata anche la caratteristica BH dell'aria. Si osserva che tale caratteristica è rettilinea. Una caratteristica peculiare dei magneti permanenti è che la retta di lavoro risulta pressochè parallela alla caratteristica magnetica dell'aria, cioè:

$$\alpha_m \cong \alpha_a$$

La pendenza della caratteristica BH in un certo punto di lavoro è, ovviamente, determinata dalla derivata:

$$\frac{dB}{dH}$$

la quale viene definita **permeabilità magnetica differenziale**.

La permeabilità magnetica differenziale dell'aria è pari a quella del vuoto, ossia uguale a

$$\tan \alpha_a = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ A/m}$$

La permeabilità magnetica differenziale del magnete permanente quando funziona sulla retta di lavoro è molto vicina a quella dell'aria e, per la precisione, è data da:

$$\tan \alpha_m = \mu_0 \mu_{rm}$$

dove μ_{rm} è un numero adimensionale con valori tipici attorno tra 1.03 e 1.05, quindi sostanzialmente approssimabile con uno.

$$\mu_{rm} \cong 1$$

Con riferimento alla Fig. 2, si può notare che, se il magnete viene sottoposto a un campo smagnetizzante molto intenso, il punto di lavoro si porta a sinistra del punto F entrando nel cosiddetto **ginocchio di smagnetizzazione**, cioè una regione del ciclo di isteresi che non è più rettilinea. Ad esempio, supponiamo che il punto di lavoro si porti in E per effetto di un campo magnetico smagnetizzante (quindi negativo) pari a H_0 . A questo punto, se l'intensità del campo magnetico smagnetizzante viene ridotta, il punto di lavoro si sposta verso destra lungo una nuova retta chiamata «**recoil line**» che risulta parallela alla retta di lavoro ma più bassa. Quindi, quando il campo H sarà portato a zero, l'induzione residua non sarà più B_r ma sarà ridotta a un valore $B'_r < B_r$. Ciò significa che il magnete permanente ha perso parte della sua capacità di generare flusso, ossia le sue prestazioni si sono «deteriorate» (si noti che lungo la «recoil line» a parità di H si ha un'induzione B sempre più bassa di quella che si avrebbe se il magnete funzionasse sulla retta di lavoro).

Si comprende quindi che, se si vuole mantenere nel tempo la «bontà» del magnete, è fondamentale che il suo punto di lavoro non si sposti mai a sinistra del punto F, cioè resti sempre sulla retta di lavoro. In altri termini, è necessario evitare che il magnete sia sottoposto a campi smagnetizzanti troppo intensi, prodotti dalla corrente statorica.

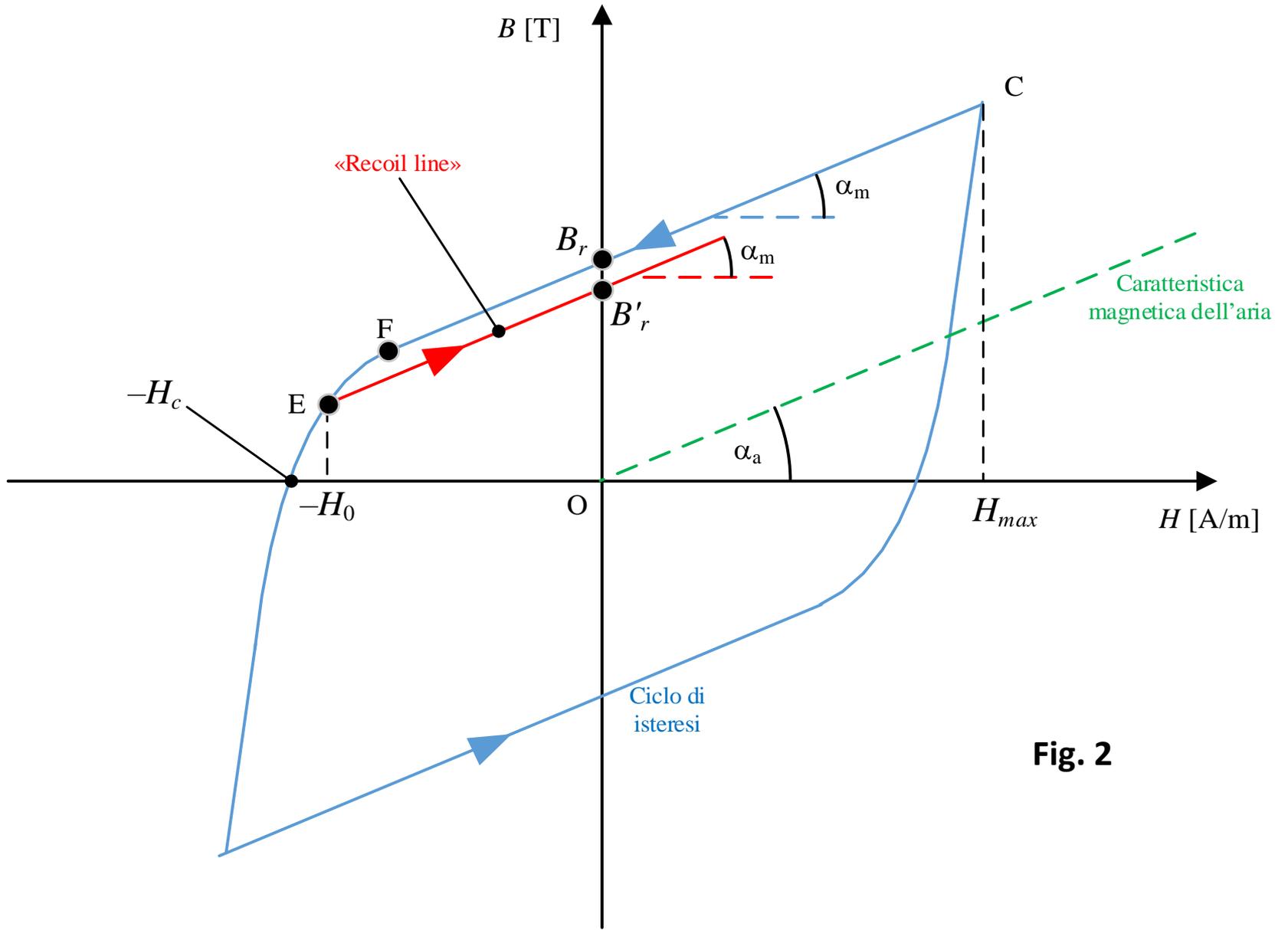


Fig. 2

In Fig. 3 sono riportate le parti di interesse (secondo quadrante) delle caratteristiche BH (ciclo di isteresi) per alcuni materiali usati o utilizzabili come magneti permanenti.

Un materiale si considera avere buone prestazioni, ossia essere pregiato, se:

- a) ha un'elevata induzione residua
- b) ha un'elevato campo coercitivo.

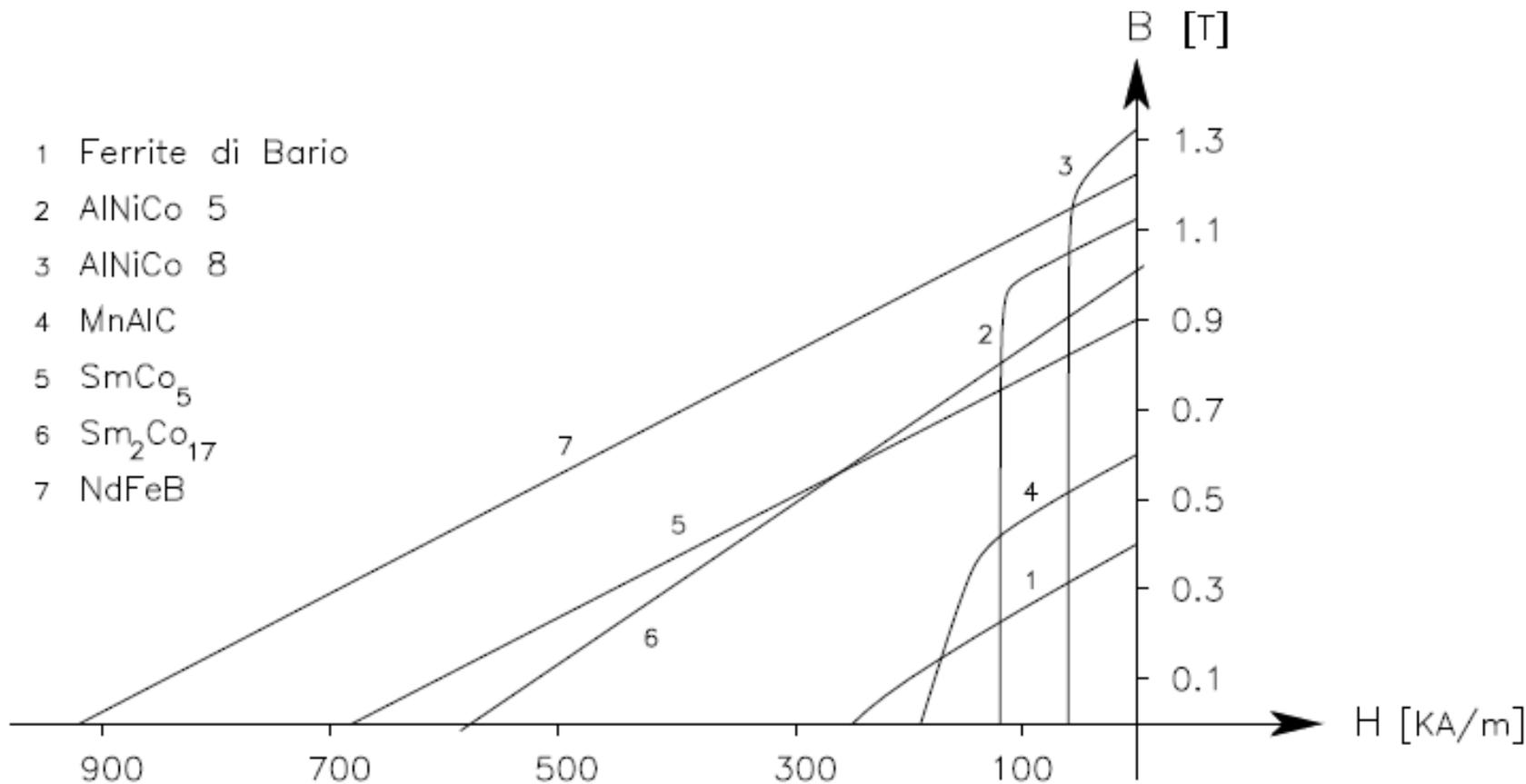


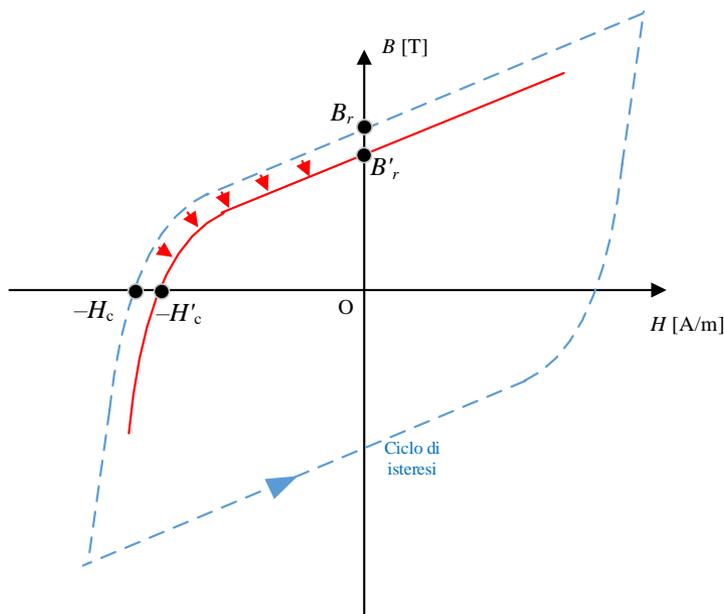
Fig. 3

Infatti, la proprietà (a) consente di ottenere, con il magnete, un elevato flusso, mentre la proprietà (b) consente di minimizzare il rischio di smagnetizzazione.

Materiali particolarmente pregiati e di largo impiego come magneti permanenti nelle macchine elettriche sono le «**terre rare**», ossia le leghe di **Neodimio-Ferro-Boro** («5») e di **Samarium-Cobalto** («6» e «7»).

La **ferrite** («1») ha invece prestazioni molto inferiori, ma costo più basso. Pertanto è usata nelle applicazioni vi sono vincoli di costo stringenti.

Si osserva che, sia per le terre rare che per le ferriti, la caratteristica del materiale nel secondo quadrante è approssimativamente lineare, cioè il ginocchio di smagnetizzazione è contenuto nel terzo quadrante.



La caratteristica dei vari materiali è negativamente influenzata dall'aumento della temperatura. L'effetto dell'aumento di temperatura consiste infatti in un abbassamento della retta di lavoro e nella riduzione del campo coercitivo. Pertanto lo stesso magnete, ad alte temperature, produce meno flusso ed è più soggetto al rischio di smagnetizzazione.

In Fig. 4 si mostra il caso particolare del Neodimio-Ferro-Boro.

NdFeB

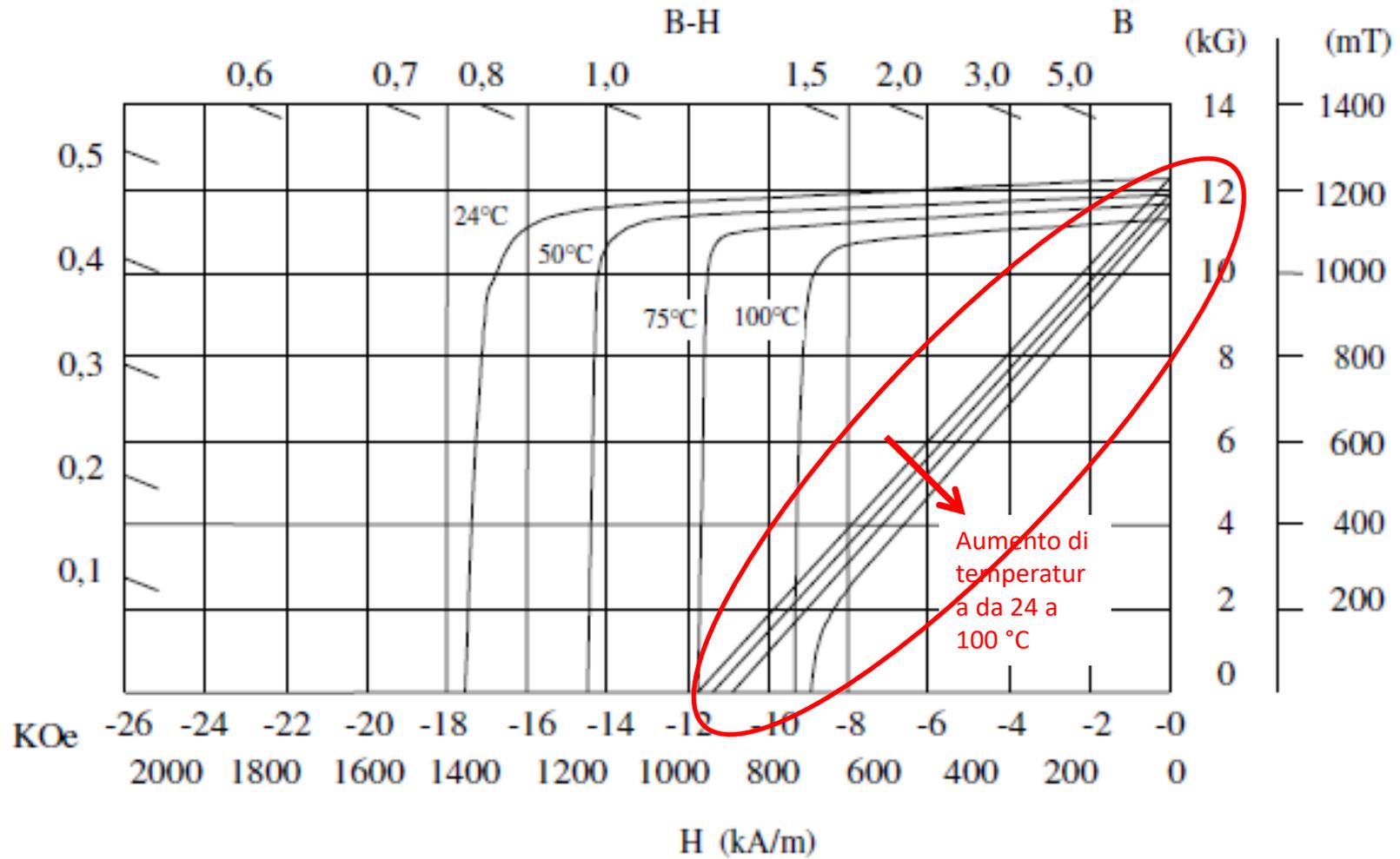


Fig. 4

Per la modellizzazione e lo studio delle macchine elettriche a magneti permanenti, si assumerà nel seguito che la caratteristica del magnete coincide con una retta nel secondo quadrante.

Si nota che il secondo quadrante è la parte della retta di lavoro che interessa in quanto, come si vedrà, il campo magnetico H a cui è soggetto il magnete nella macchina elettrica è praticamente sempre negativo (cioè smagnetizzante).

$$B(H) = B_r + \mu_m H \quad \text{Equazione della retta di lavoro} \quad (1)$$

$$\mu_m = \mu_0 \mu_{rm}$$

$$\mu_{rm} = 1.03 \cong 1$$

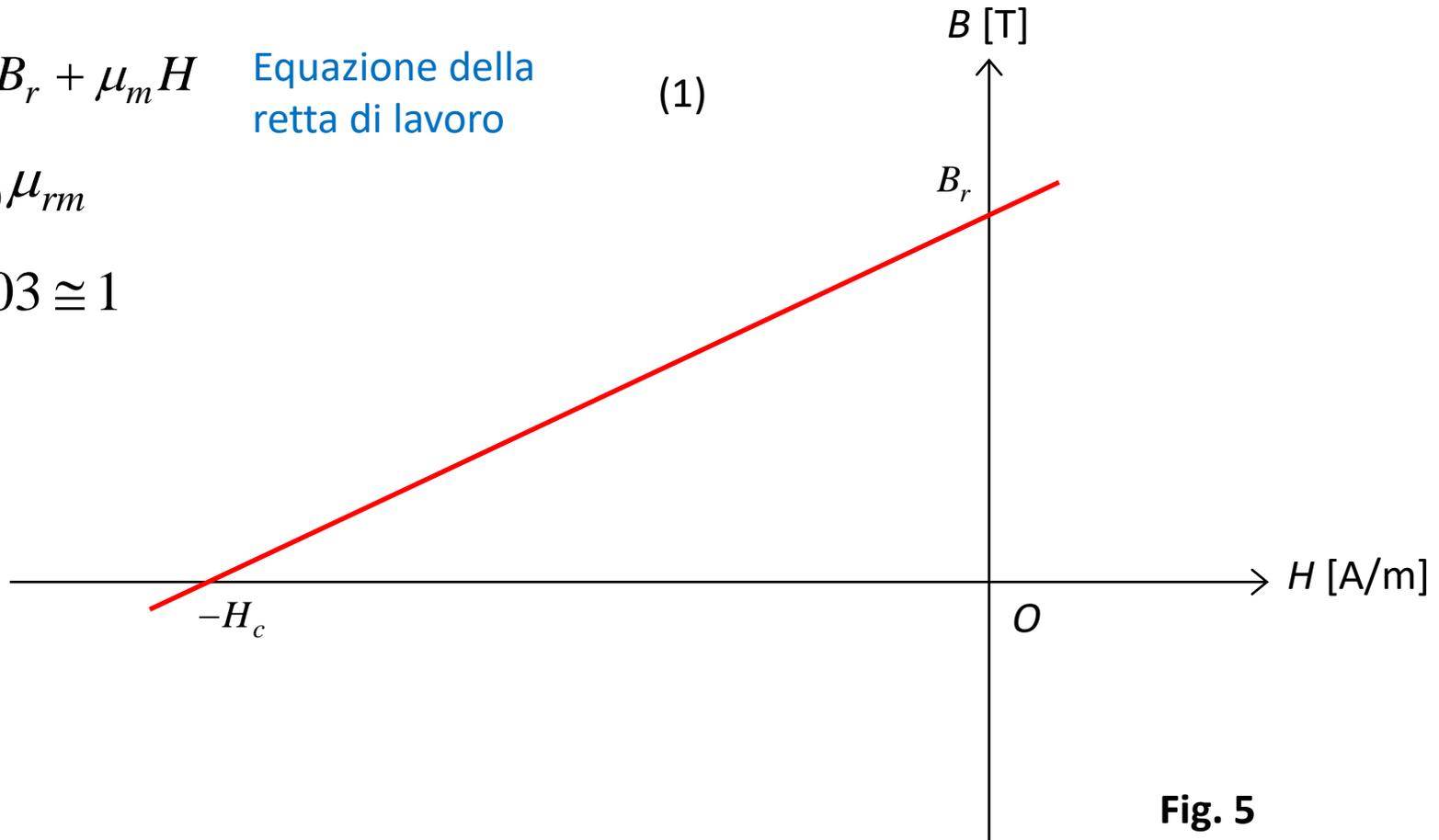


Fig. 5

Dimostriamo ora che, nell'ipotesi fatta di considerare la sua caratteristica lineare, il magnete permanente può essere rappresentato come una «bobina equivalente», ossia come un circuito di «eccitazione equivalente» caratterizzato da una corrente di eccitazione costante.

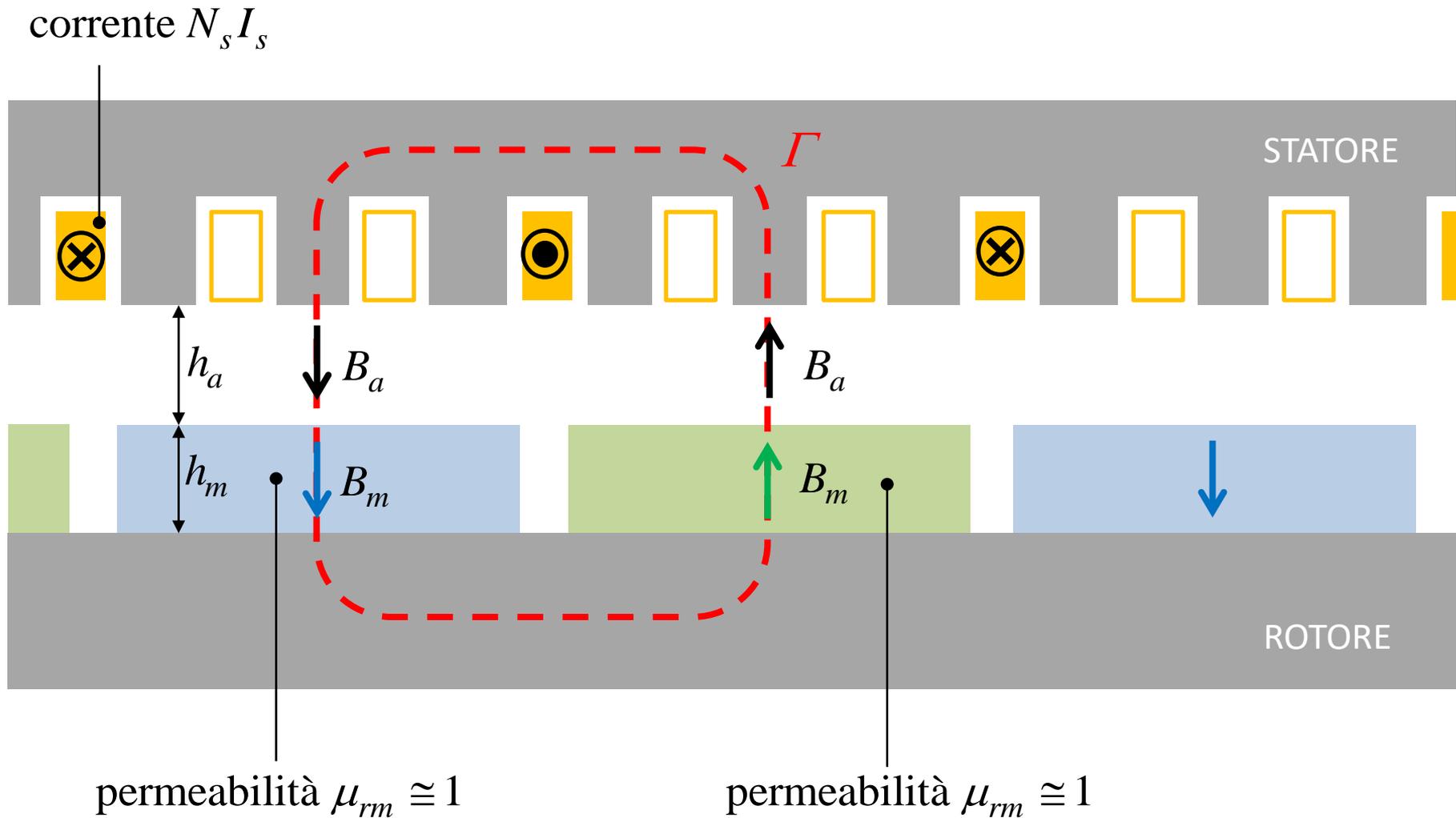
A tale scopo, si consideri la situazione illustrata in Fig. 6, che si riferisce a una macchina a magneti superficiali (il discorso è tuttavia immediatamente generalizzabile anche al caso di magneti interni).

Si nota che, nella figura, B_m e B_a rappresentano rispettivamente l'induzione nel magnete e nell'aria del traferro. Per la nota proprietà dell'induzione magnetica (continuità della componente normale alla superficie di interfaccia tra materiali diversi), si può scrivere:

$$B_m = B_a = B \quad (2)$$

Supponiamo che lo statore sia alimentato in modo da produrre un campo magnetico orientato lungo l'asse diretto cioè l'asse del flusso prodotto dal magnete. In Fig. 6, ad esempio, ciò è ottenuto dai lati di bobina mostrati, ciascuno dei quali comprendente N_s conduttori percorsi da corrente I_s .

Facciamo la solita ipotesi di trascurare la saturazione magnetica del nucleo magnetico, ossia di assumere una permeabilità magnetica infinita e, quindi, campo H nullo al suo interno.



$$B_m = B_a = B$$

Fig. 6

Applicando il teorema della circuitazione di Ampere alla curva chiusa Γ si ha:

$$2(H_a h_a + H_m h_m) = N_s I_s \quad (3)$$

Considerando che:

$$B_a = \mu_0 H_a \quad \longrightarrow \quad H_a = \frac{B_a}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0} \quad (4)$$

$$B_m = B_r + \mu_m H_m \quad \longrightarrow \quad H_m = \frac{B_m - B_r}{\mu_0 \mu_{rm}} = \frac{B - B_r}{\mu_0 \mu_{rm}} \quad (5)$$

la (3) diventa:

$$2 \left(\frac{B}{\mu_0} h_a + \frac{B - B_r}{\mu_{rm}} h_m \right) = N_s I_s \quad (6)$$

Risolviendo in B si trova la seguente espressione dell'induzione magnetica al traferro (sull'asse dei magneti):

$$B = \frac{B_r h_m}{h_m + h_a \mu_{rm}} + N_s I_s \frac{\mu_0 \mu_{rm}}{2(h_m + h_a \mu_{rm})} \quad (7)$$

Dalla caratteristica (1), l'induzione residua è:

$$B_r = H_c \mu_{rm} \mu_0 \quad (8)$$

che, sostituita in (7), dà:

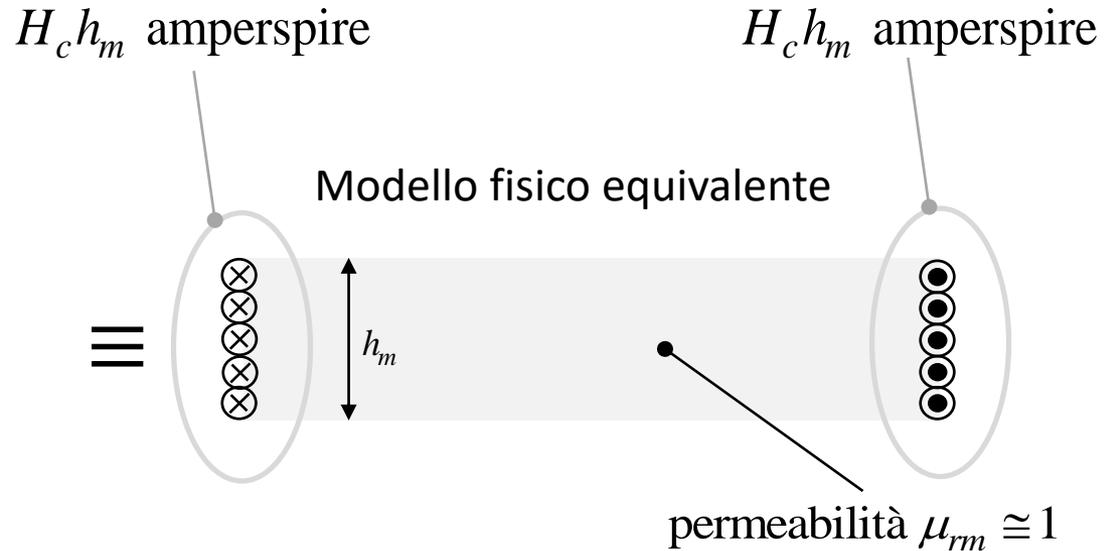
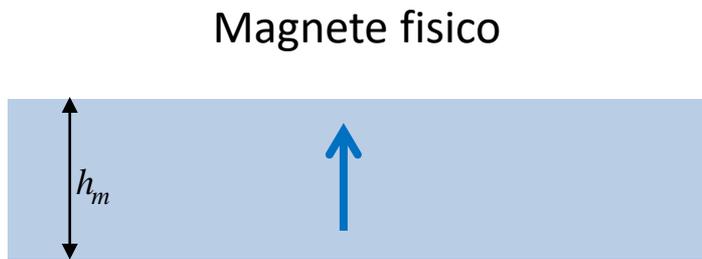
$$B = \left(H_c h_m \right) \frac{\mu_0 \mu_{rm}}{h_m + h_a \mu_{rm}} + N_s I_s \frac{\mu_0 \mu_{rm}}{2(h_m + h_a \mu_{rm})} =$$
$$= \frac{\mu_0 \mu_{rm}}{h_m + h_a \mu_{rm}} \left(H_c h_m + \frac{N_s I_s}{2} \right) \quad (9)$$

Contributo di FMM
dovuta al magnete
permanente

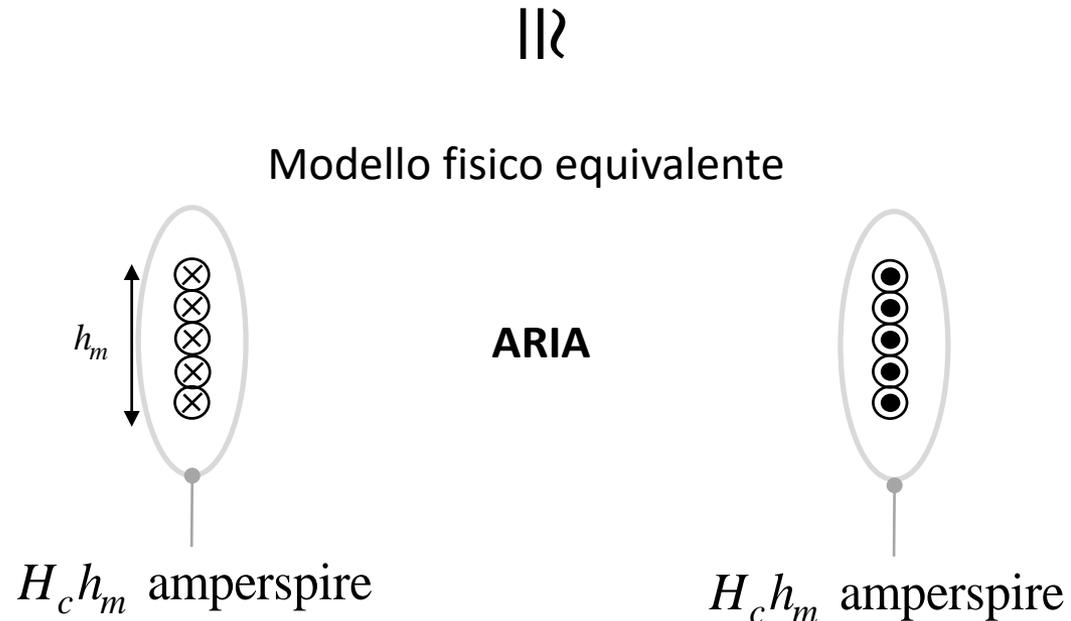
Contributo di FMM
dovuta
all'avvolgimento di
statore

Si intuisce quindi che il magnete permanente può essere modellizzato come un avvolgimento di eccitazione equivalente, percorso da corrente costante e tale da produrre una FMM complessiva pari a $H_c h_m$.

Fig. 7



Ai fini del calcolo dei campi, il magnete può essere sostituito da un circuito elettrico elettrico («solenoido in aria») che produce una quantità di amperspire pari al prodotto dal campo coercitivo del magnete per la sua altezza (in senso parallelo alla magnetizzazione).



Infatti consideriamo la situazione in Fig. 8, che corrisponde a quella mostrata in Fig. 6 dopo che i magneti sono stati sostituiti con i relativi solenoidi equivalenti.

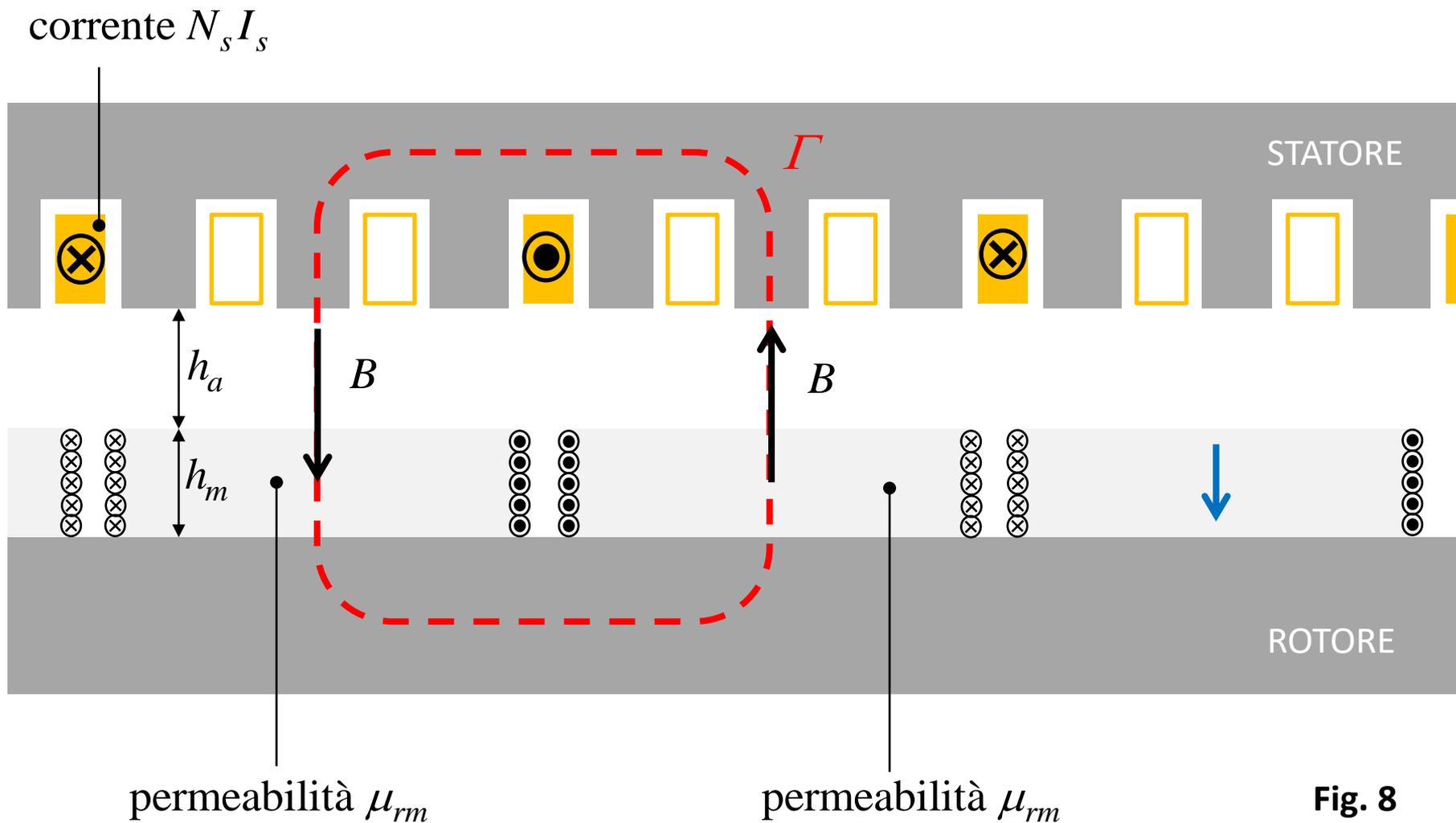


Fig. 8

Dalla legge di circuitazione applicata al circuito Γ si ha:

$$2 \left(\frac{B}{\mu_0} h_a + \frac{B}{\mu_0 \mu_{rm}} h_m \right) = N_s I_s + 2 H_c h_m \quad (10)$$

da cui:

$$B = \frac{B_r h_m}{h_m + h_a \mu_{rm}} + N_s I_s \frac{\mu_0 \mu_{rm}}{2(h_m + h_a \mu_{rm})} \cong B_r \frac{h_m}{h_m + h_a} + N_s I_s \frac{\mu_0}{2(h_m + h_a)} \quad (11)$$

che è lo stesso campo al traferro trovato in (7) studiando la configurazione fisica (con magnete vero e proprio, Fig. 6).

Dall'equazione (11) [o (7)] si possono dedurre tra l'altro le seguenti osservazioni:

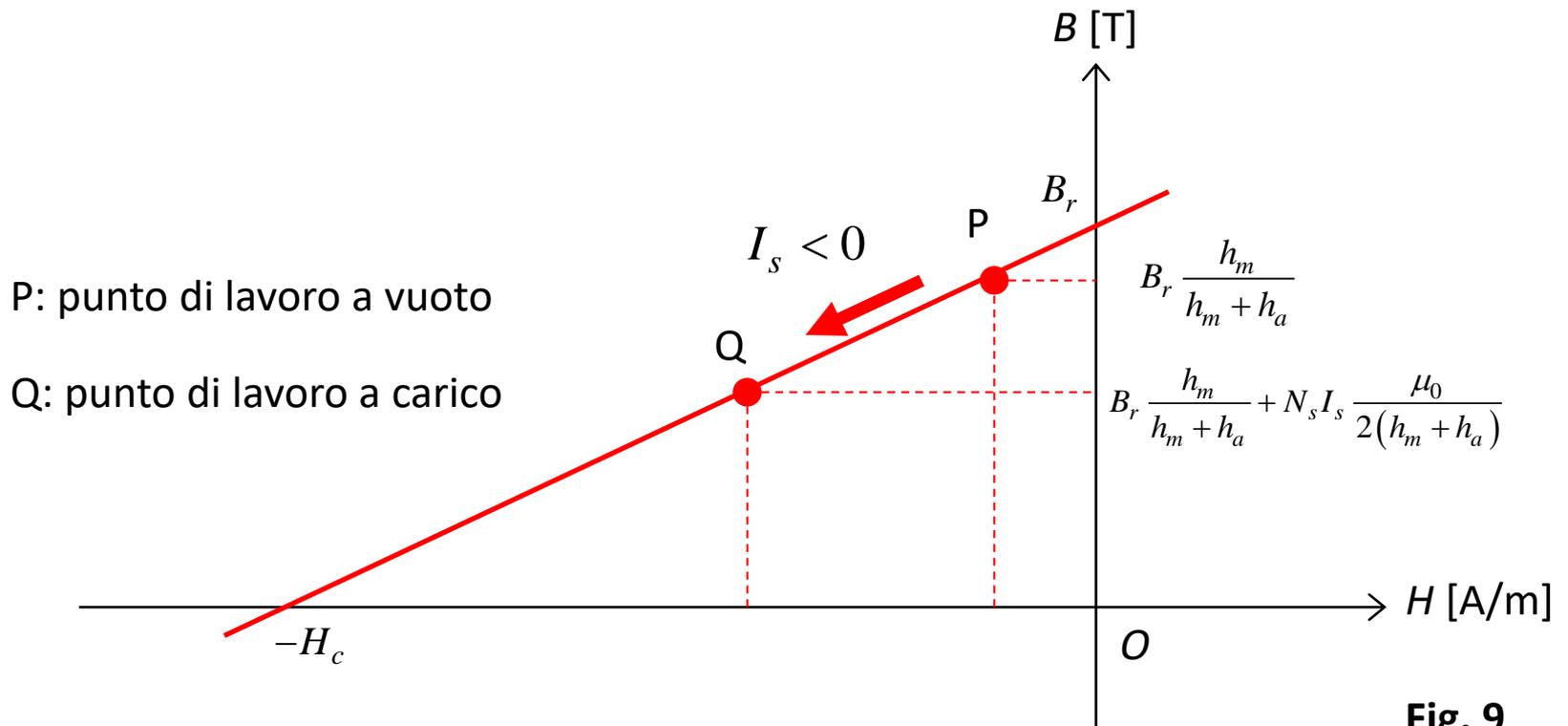
L'induzione magnetica a vuoto, cioè senza correnti di statore, ovvero dovuto ai soli magneti permanenti è data da:

$$B \cong B_r \frac{h_m}{h_m + h_a} < B_r \quad (12)$$

Si vede che l'induzione a vuoto è proporzionale all'induzione residua mediante un coefficiente che rapporta l'altezza del magnete alla somma di altezza magnete più altezza del traferro d'aria. In particolare, nel caso in cui il traferro d'aria (h_a) abbia ampiezza trascurabile rispetto all'altezza del magnete, si vede che l'induzione a vuoto coincide con l'induzione residua.

In generale, il traferro d'aria non è trascurabile e, quindi, l'induzione a vuoto è minore dell'induzione residua. Con riferimento alla Fig. 9, il punto di lavoro a vuoto è quindi rappresentato dal punto P. Si noti come il punto di lavoro a vuoto, cioè senza correnti di statore, sia caratterizzato da un valore di campo magnetico H nel magnete negativo.

Quando viene applicata la corrente di statore (cioè in condizioni di carico), il punto di lavoro si sposta ulteriormente verso sinistra, portandosi nella posizione Q di Fig. 9. Infatti, come si vedrà la corrente dello statore è, nel funzionamento normale della macchina, smagnetizzante, cioè tale da produrre un campo opposto a quello del magnete. Si noti che la (11) è stata invece ricavata assumendo un verso convenzionale positivo della corrente I_s come quello mostrato in Fig. 6, cioè tale da dare un flusso concorde a quello del magnete. Ne consegue che, nel funzionamento normale della macchina (corrente smagnetizzante), I_s in (11) assumerà un valore negativo, il che spiega come, a carico, il punto di funzionamento del magnete si sposti a sinistra lungo la retta di lavoro.



Per evitare rischi di smagnetizzazione, il campo H smagnetizzante non deve assumere valori troppo elevati, anche in condizioni di guasto (es. corto circuito). Questo si può ottenere, come si vede dalla (11), scegliendo un'altezza di magnete h_m adeguata, cioè non troppo piccola.

Si comprende come la scelta dell'altezza del magnete sia un compromesso tra una questione di costo (minore è l'altezza minore è il volume e, quindi, il costo) e una esigenza di minimizzare il rischio di smagnetizzazione.

Modellazione matematica della macchina sincrona a magneti permanenti

Ai fini della modellizzazione matematica, verrà considerato il solito statore con avvolgimento trifase di Fig. 10, dove si è assunto per semplicità il caso di due poli (in modo che angoli elettrici coincidano con quelli meccanici), avvolgimento a singolo strato con una bobina per polo per fase.

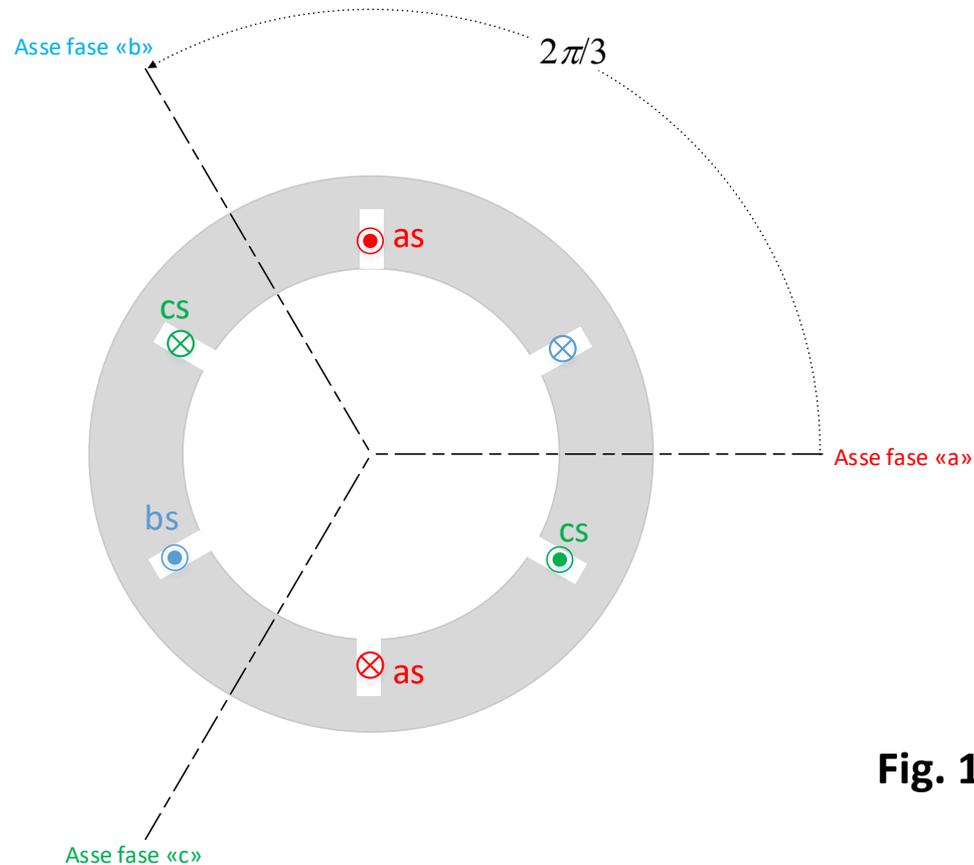
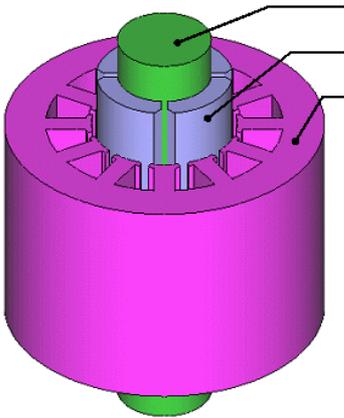


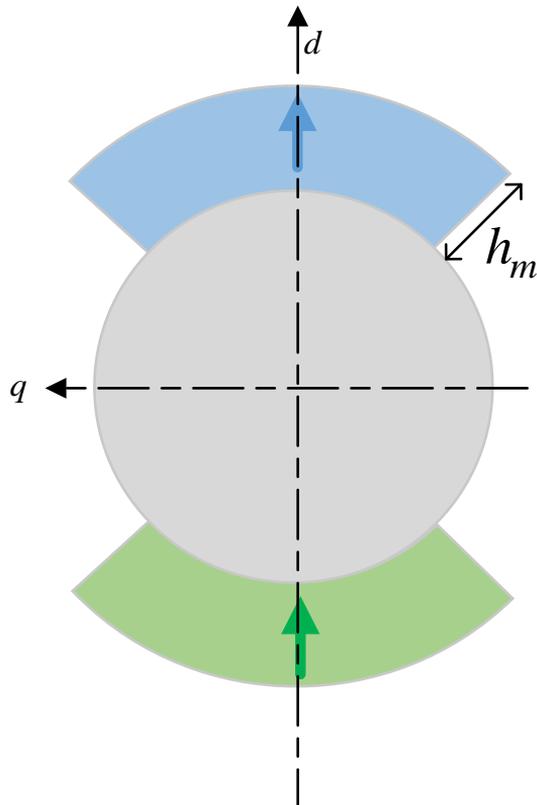
Fig. 10

Si considereranno le tipologie di rotore mostrate in Figg. 11, 12 E 13. Nelle tre figure, è mostrato il modello fisico del rotore e quello equivalente (cioè tale da produrre lo stesso flusso al traferro) in cui – secondo quanto appena dimostrato – il magnete permanente viene sostituito con un solenoide in aria con un numero di amperspire pari a $H_c h_m$ dove H_c è il campo coercitivo del magnete e h_m l'altezza del magnete stesso misurata lungo la direzione di magnetizzazione.

**ROTORE A
MAGNETI
PERMANENTI
SUPERFICIALI**



Modello «fisico»



Modello con solenoide equivalente

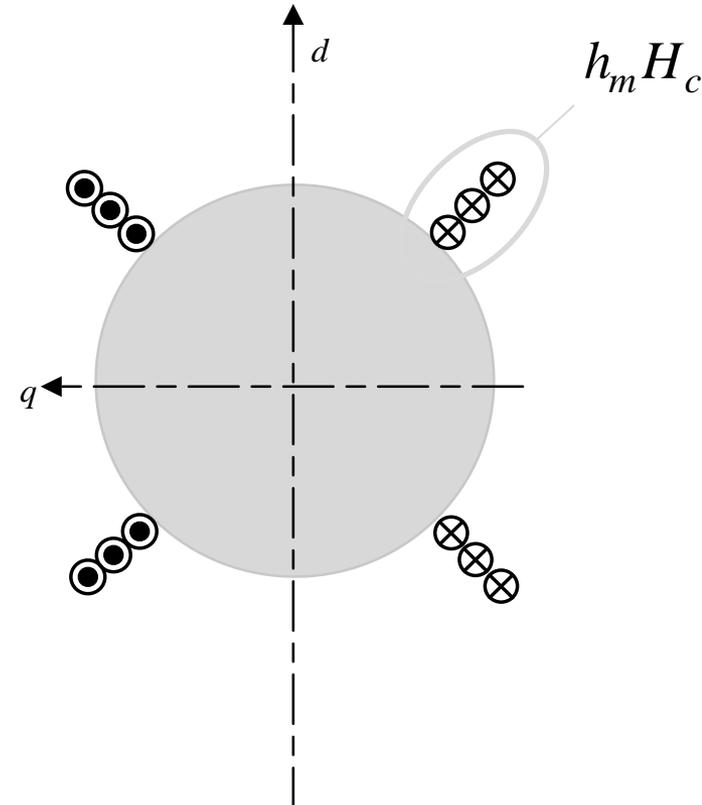


Fig. 11

Modello «fisico»

Modello con solenoide equivalente

**ROTORE A MAGNETI
PERMANENTI
INTERNI CON
MAGNETIZZAZIONE
RADIALE**

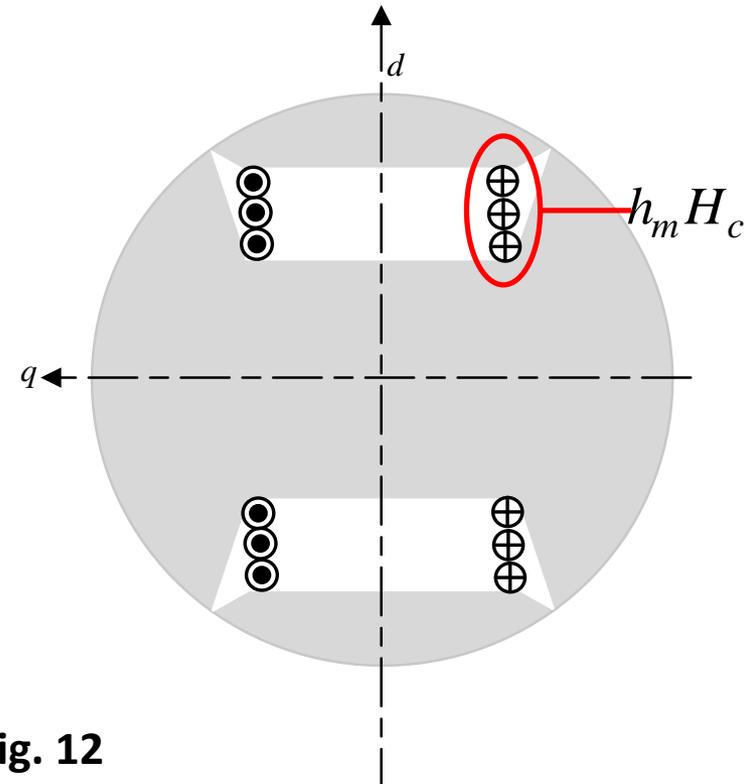
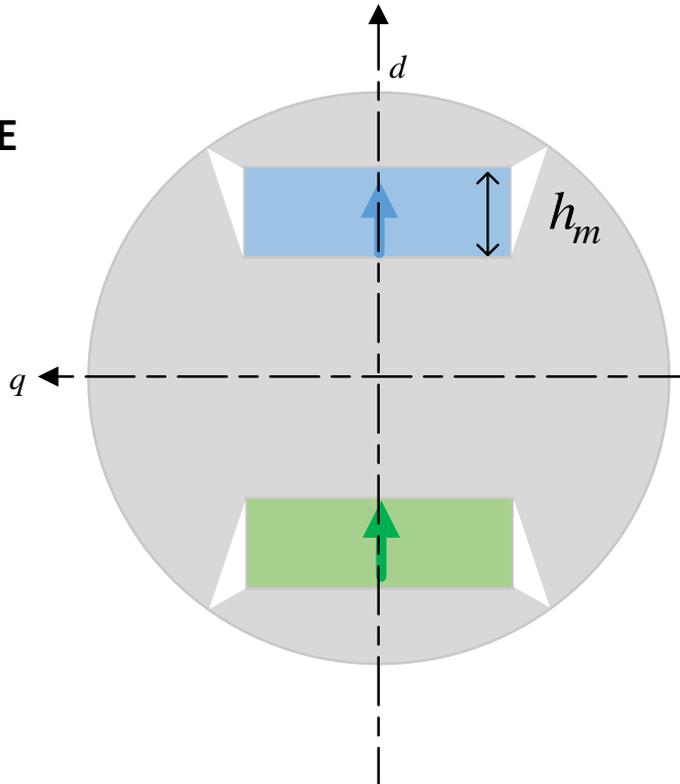
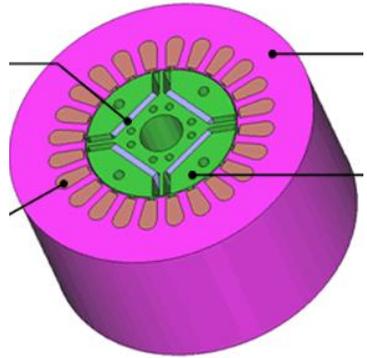
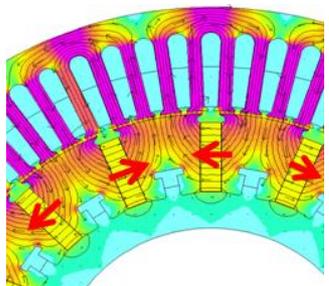


Fig. 12

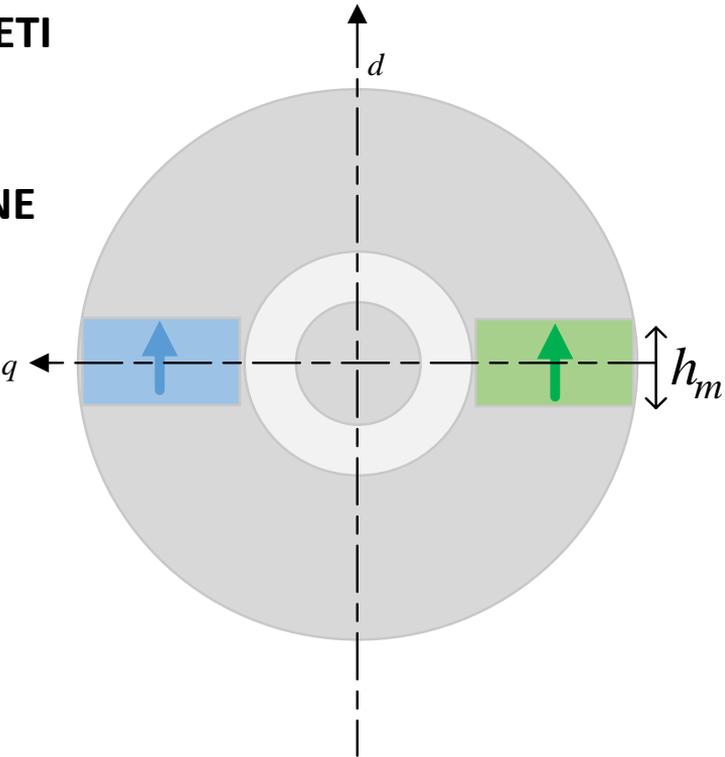
NB: Per semplicità di è rappresentato il caso di struttura con un solo magnete per polo, ma tutti i ragionamenti sono immediatamente estendibili al caso di più magneti per polo.

NB: La struttura di questo rotore, quando si omettano i magneti permanenti, viene a coincidere con quella del rotore di una macchina a riluttanza. Matematicamente, il modello della macchina a riluttanza si ottiene imponendo $H_c=0$ (solenoidi rappresentativo del magnete permanenti senza corrente).

**ROTORE A MAGNETI
PERMANENTI
INTERNI CON
MAGNETIZZAZIONE
TANGENZIALE**



Modello «fisico»



Modello con solenoide equivalente

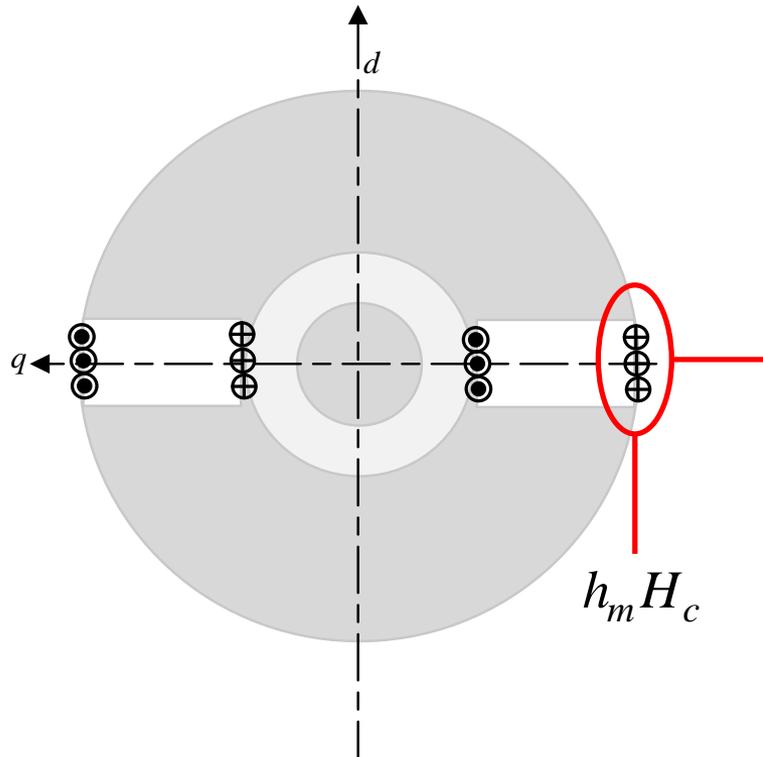


Fig. 13

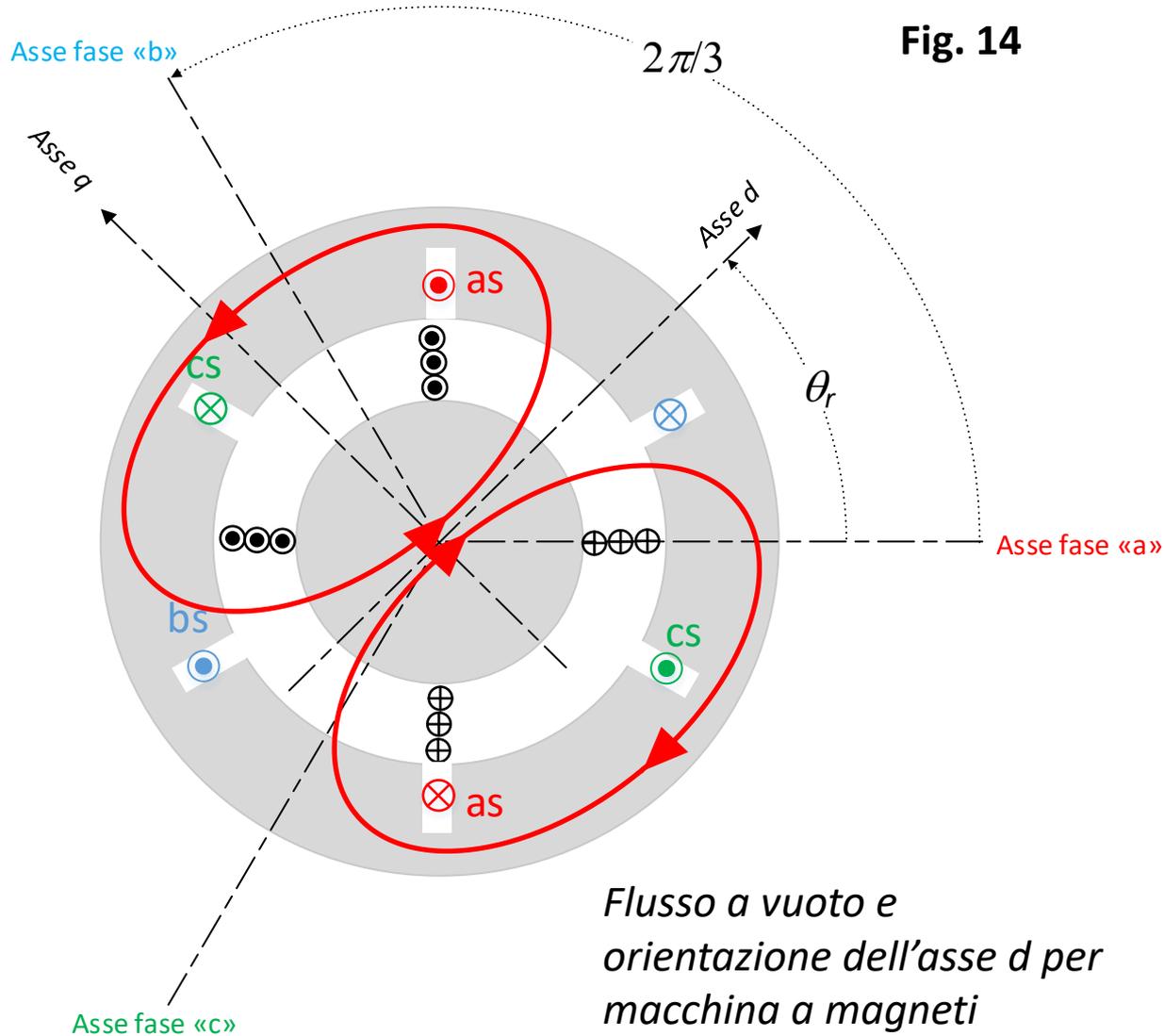
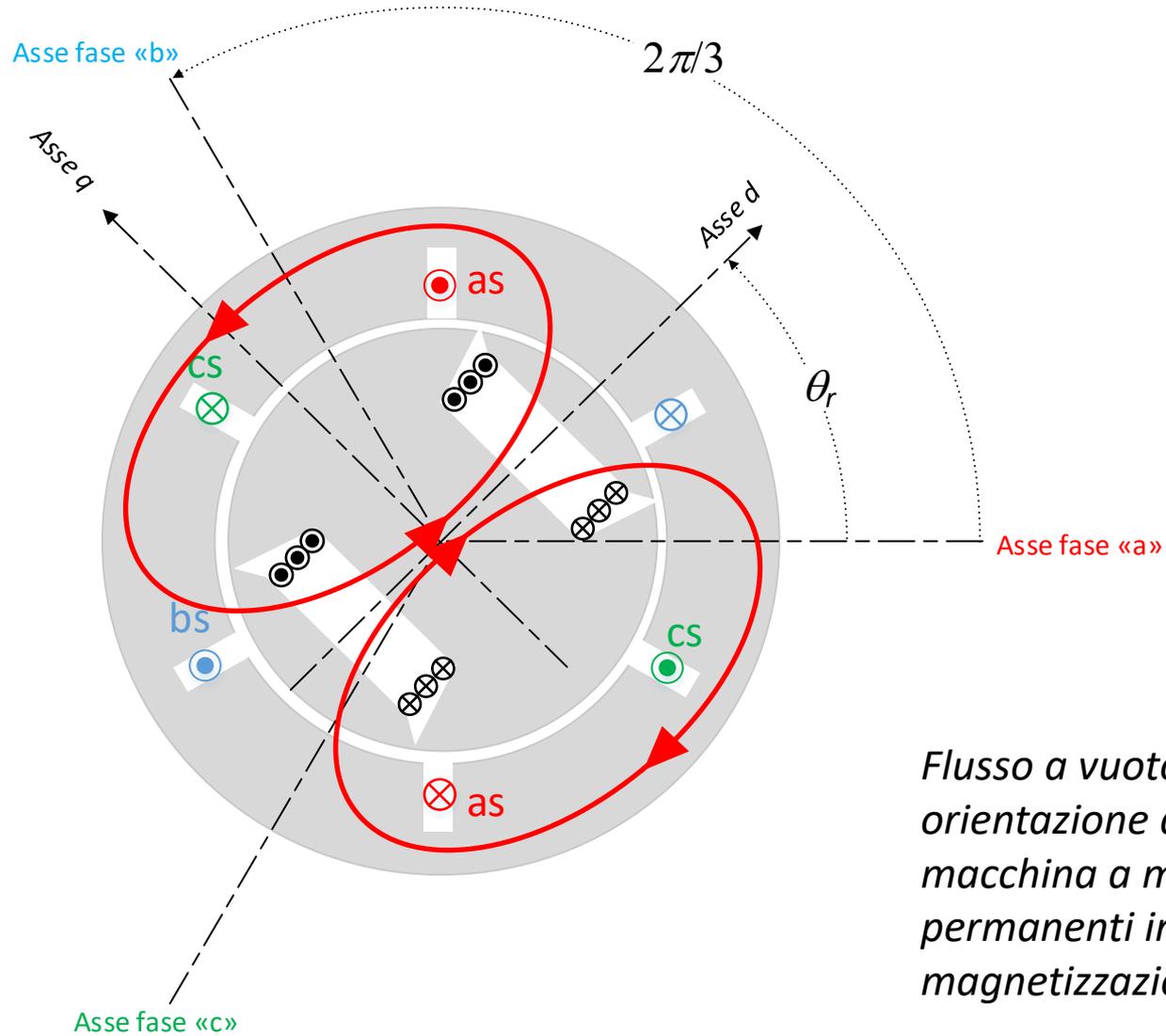


Fig. 14

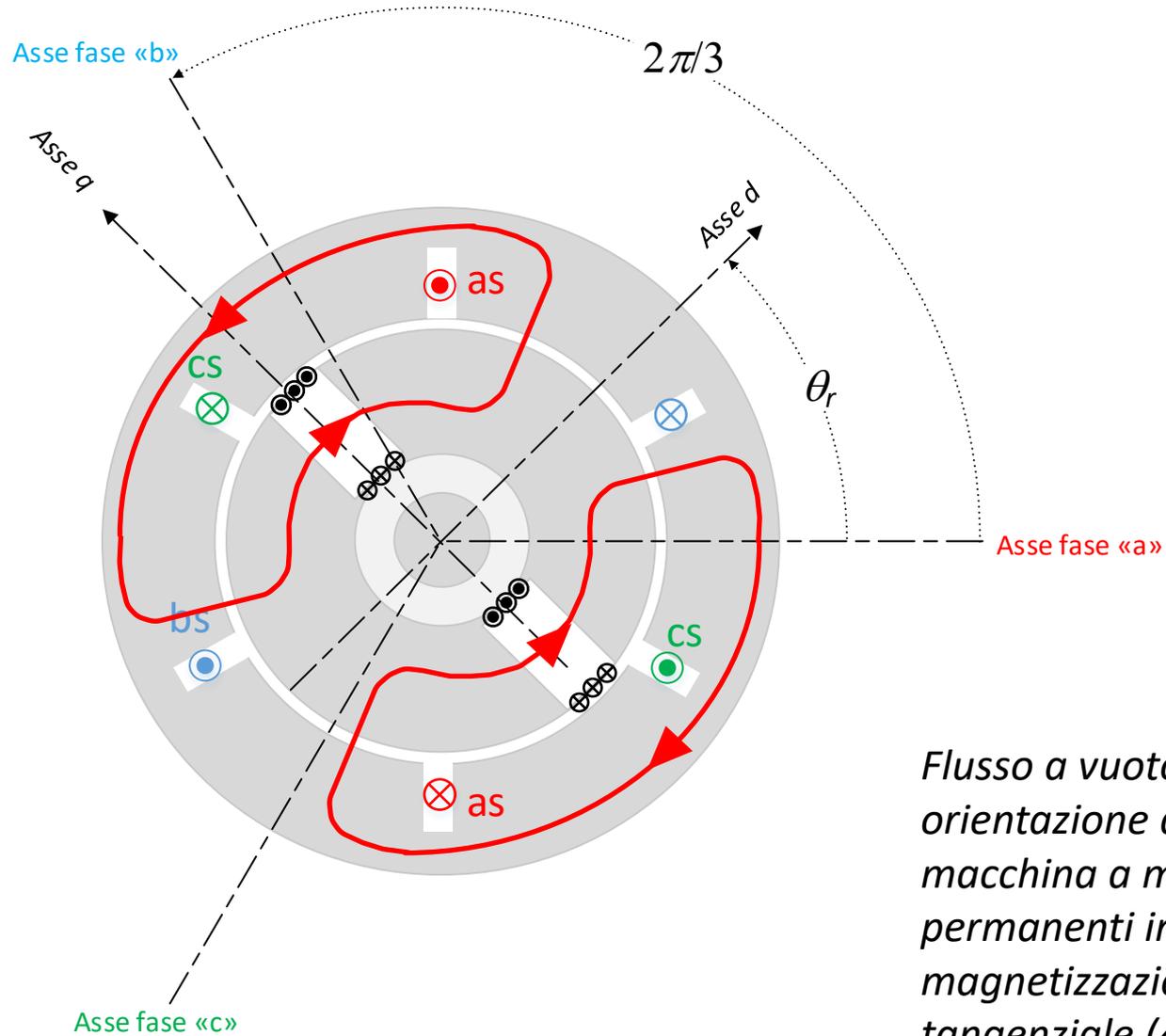
Come per le macchine sincrone a rotore avvolto, l'asse diretto (d) è l'asse di simmetria del flusso a vuoto (cioè prodotto dai soli magneti), asse orientato come il flusso stesso. La posizione (angolo elettrico θ_r) dell'asse diretto rispetto alla fase «a» di statore identifica la posizione del rotore. L'asse q è posto a 90 gradi elettrici rispetto all'asse d.

Flusso a vuoto e orientazione dell'asse d per macchina a magneti permanenti superficiali (SPM)



Flusso a vuoto e orientazione dell'asse d per macchina a magneti permanenti interni (IPM) a magnetizzazione radiale.

Fig. 15



Flusso a vuoto e orientazione dell'asse d per macchina a magneti permanenti interni (IPM) a magnetizzazione tangenziale («spoke type»).

Fig. 16

Come si vede chiaramente dalle Figg. 14, 15 e 15, il fatto di aver sostituito i magneti permanenti con circuiti elettrici equivalenti (solenoidi in aria) riduce di fatto la macchina sincrona a magneti permanenti al caso di una macchina sincrona con rotore eccitato elettricamente, con corrente di eccitazione costante e senza circuiti smorzatori.

Questo fatto è di notevole importanza in quanto consente di utilizzare utilizzare i risultati ottenuti per la modellizzazione della macchina sincrona a rotore avvolto, a patto di imporre a zero le correnti di smorzatore e fissare la FMM (ampersipre) di eccitazione per polo ($N_F I_F$) pari al valore costante H_{c_m} .

Nella modellizzazione delle macchine sincrone a rotore avvolto, si erano definite due induttanze magnetizzanti L_{md} e L_{mq} come segue:

- L_{md} è l'induttanza di magnetizzazione (cioè dovuta al flusso al traferro) di una fase di statore quando il rotore è posto con l'asse diretto coincidente con l'asse della fase stessa;
- L_{mq} è l'induttanza di magnetizzazione (cioè dovuta al flusso al traferro) di una fase di statore quando il rotore è posto con l'asse q coincidente con l'asse della fase stessa.

Si noti che, per il calcolo delle induttanze suddette, si deve alimentare una fase (mentre il rotore è collocato in posizione opportuna) con corrente I e calcolare il flusso concatenato dalla fase stessa (λ) e dovuto alla sola corrente I . L'induttanza è poi calcolata come λ/I . In tutto questo, il rotore non è alimentato, cioè la corrente di eccitazione deve essere posta a zero. Ciò equivale a imporre pari a zero la corrente del solenoide rappresentativo del magnete permanente.

Le situazioni da considerare per il calcolo di L_{md} e L_{mq} per macchine sincrone a magneti permanenti sono mostrate in Figg. 17, 18 e 19. Nelle figure, le curve rosse rappresentano schematicamente l'andamento del flusso prodotto dalla fase a , che si suppone alimentata, e per la quale si vogliono calcolare L_{md} e L_{mq} .

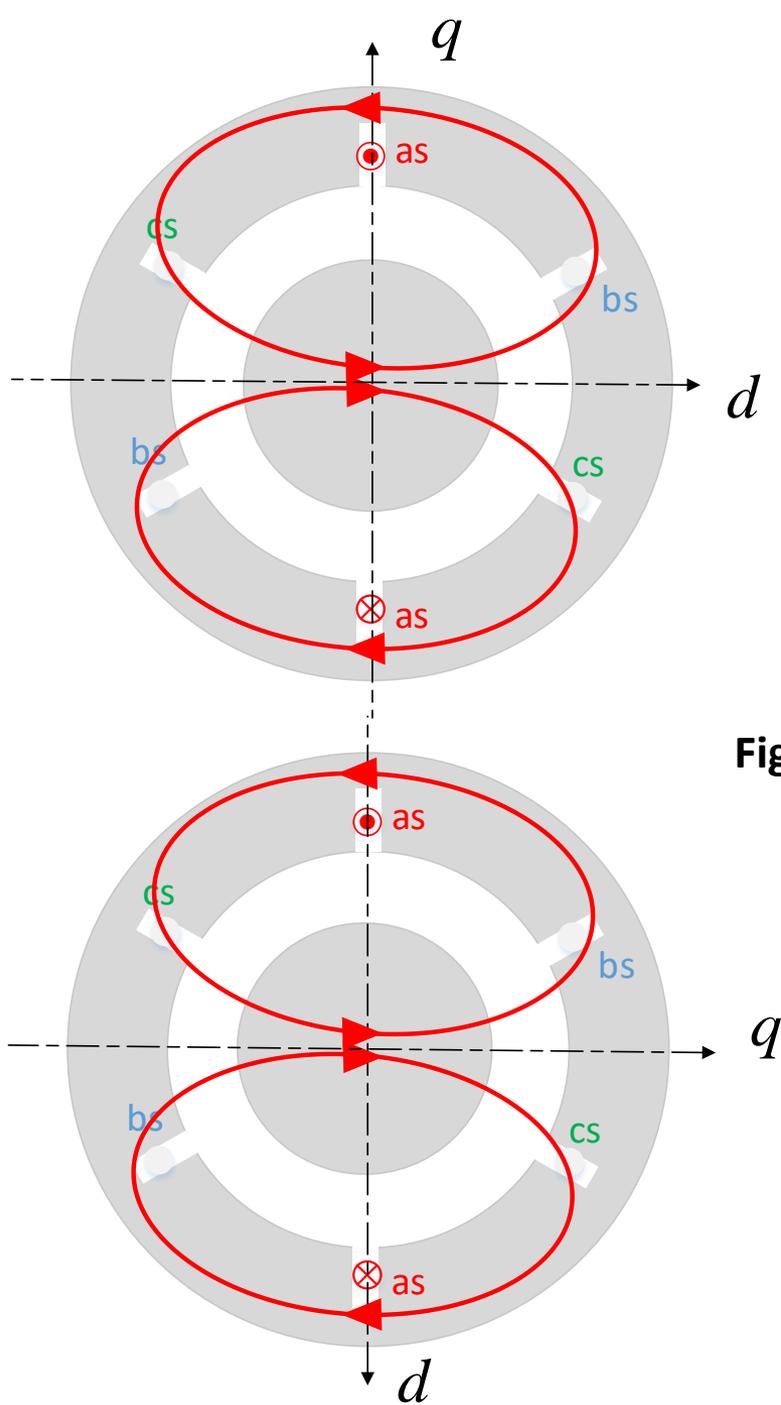
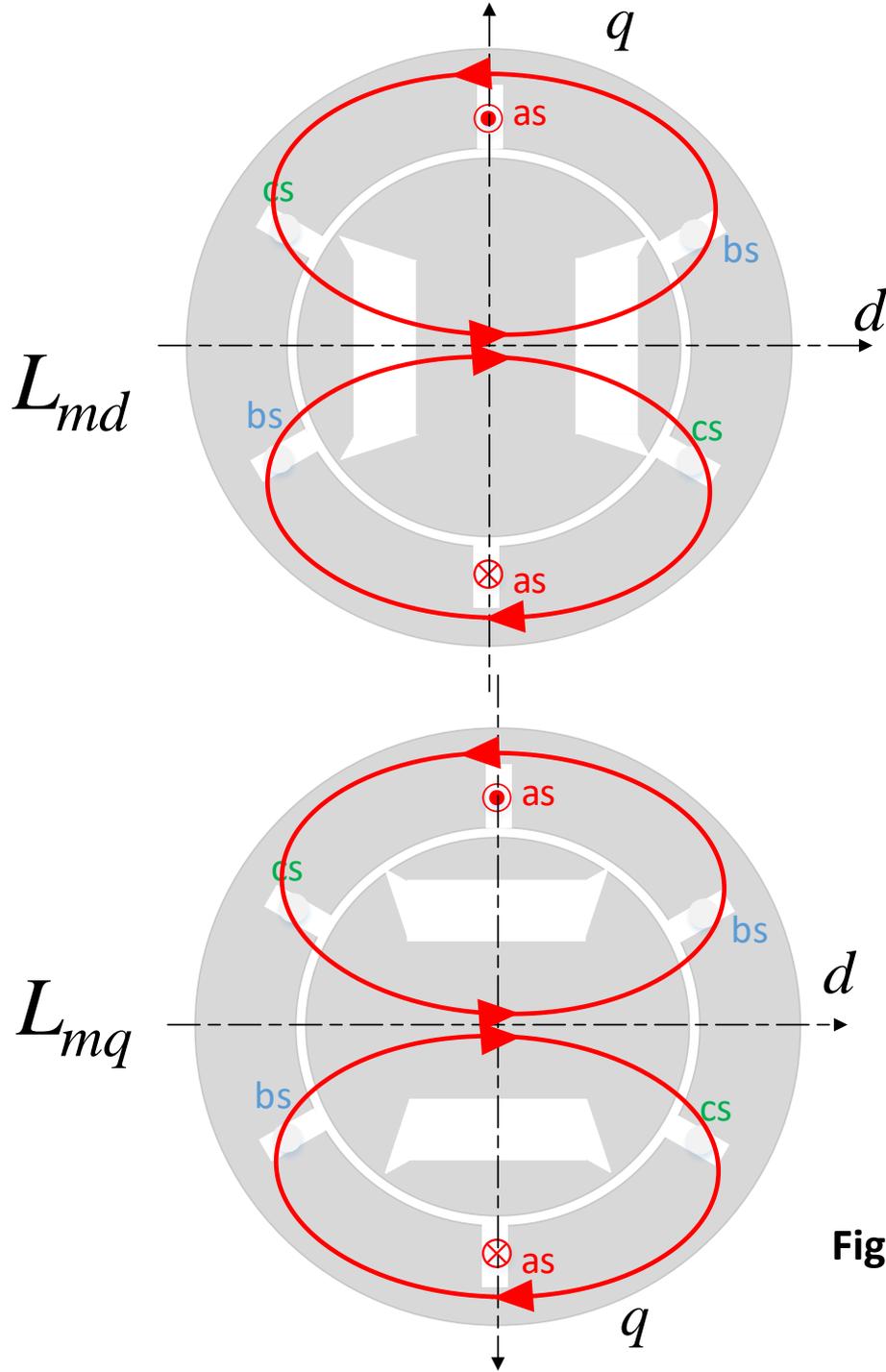


Fig. 17

Calcolo di L_{md} e L_{mq} come induttanze della fase «a» di statore con asse di rotore parallelo e sfasato di 90° rispetto all'asse della fase, nel caso di macchina SPM. Le linee rosse rappresentano il flusso prodotto dalla fase.

Si nota che nella macchina SPM, il flusso concatenato con la fase, quando questa viene alimentata con corrente I , non dipende dalla posizione del rotore. Quindi:

$$L_{md} = L_{mq}$$



Calcolo di L_{md} e L_{mq} come induttanze della fase «a» di statore con asse di rotore parallelo e sfasato di 90° rispetto all'asse della fase, nel caso di macchina IPM a magnetizzazione radiale.

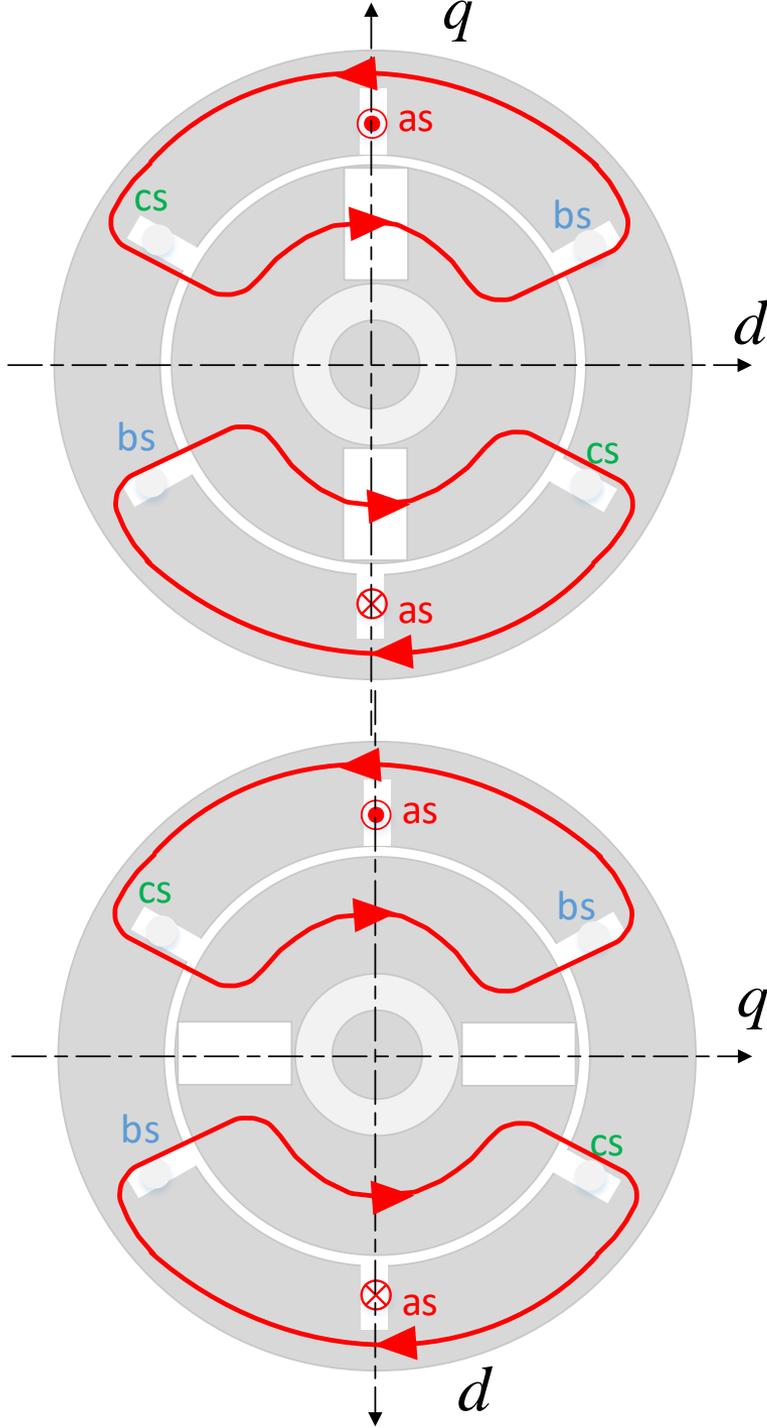
Le linee rosse rappresentano il flusso prodotto dalla fase.

Si nota che nella macchina IPM, il flusso concatenato con la fase, quando questa viene alimentata con corrente I , è maggiore quando l'asse q del rotore è allineato con l'asse della fase, in quanto in tale condizione il circuito magnetico ha minore riuttanza.

Quindi:

$$L_{mq} > L_{md}$$

Fig. 18



Calcolo di L_{md} e L_{mq} come induttanze della fase «a» di statore con asse di rotore parallelo e sfasato di 90° rispetto all'asse della fase, nel caso di macchina IPM a magnetizzazione tangenziale («spoke type»).

Le linee rosse rappresentano il flusso prodotto dalla fase.

Si nota che nella macchina IPM, il flusso concatenato con la fase, quando questa viene alimentata con corrente I , è maggiore quando l'asse q del rotore è allineato con l'asse della fase, in quanto in tale condizione il circuito magnetico ha minore riluttanza.

Quindi:

$$L_{mq} > L_{md}$$

Fig. 19

Si vede quindi che le macchine sincrone a magneti permanenti possono essere «isotrope» o «anisotrope» a seconda che, rispettivamente:

$$L_{mq} \cong L_{md}$$

$$L_{mq} \cong L_{md}$$

Le macchine a magneti superficiali (SPM) sono isotrope, mentre quelle a magneti interni (IPM) sono anisotrope. Per queste ultime vale sempre:

$$L_{mq} > L_{md}$$

per macchine sincrone a magneti permanenti anisotrope (IPM)

contrariamente a quanto si era visto per le macchine sincrone a rotore avvolto anisotrope, cioè a poli salienti, per le quali si era visto che:

$$L_{md} > L_{mq}$$

per macchine sincrone a rotore avvolto anisotrope (a poli salienti)

Come osservato sopra, le macchine a riluttanza sono un caso particolare di macchine sincrone IPM (anisotrope) senza magneti permanenti, cioè con $H_c=0$.

MODELLO DINAMICO

Poichè la macchina sincrona a magneti permanenti è stata ridotta ad una con rotore avvolto avente avvolgimento di eccitazione fittizio e senza smorzatori, il modello dinamico della macchina stessa potrà essere facilmente ottenuto particolarizzando quello trovato per le macchine sincrone a rotore avvolto.

Per comodità si riportano nel seguito le equazioni dinamiche ottenute per macchina sincrona a rotore avvolto assumendo la convenzione del motore, dopo la trasformazione dq0.

$$\left[\begin{array}{l}
 v_d = R_s i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) \frac{d}{dt} i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} i_{kd} + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} i_f - \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} \right) i_q - \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) i_{kq} \\
 v_q = R_s i_q + \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} \right) \frac{d}{dt} i_q + \left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) \frac{d}{dt} i_{kq} + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) i_d + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) i_{kd} + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) i_f \\
 v_0 = R_s i_0 + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_0 \\
 0 = R_{kd} i_{kd} + \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma kd} \right) \frac{d}{dt} i_{kd} + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} i_f \\
 0 = R_{kq} i_{kq} + \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma kq} \right) \frac{d}{dt} i_{kq} + \left(\frac{3}{2} L_{mq} \right) \frac{d}{dt} i_q \\
 v_f = R_f i_f + \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma f} \right) \frac{d}{dt} i_f + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md} \right) \frac{d}{dt} i_{kd}
 \end{array} \right. \quad (13)$$

con i flussi concatenati di statore dati da:

$$\left[\begin{array}{l}
 \lambda_d = \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) i_d + \frac{3}{2} L_{md} (i_{kd} + i_f) \\
 \lambda_q = \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} \right) i_q + \frac{3}{2} L_{mq} i_{kq}
 \end{array} \right. \quad (14)$$

si richiama il significato dei simboli applicabili anche al caso di magneti permanenti:

R_s Resistenza di fase di statore

$L_{\sigma s}$ Induttanza di dispersione di una fase di statore

ω_r Posizionen angolare elettrica dell'asse d rispetto all'asse della fase a

Le variabili di statore trasformate (d, q, 0) si relazionano con le variabili fisiche di fase (a, b, c) tramite:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_3(\theta_r) \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{T}_3(\theta_r) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r - \frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{4}{3}\pi\right) \\ -\sin(\theta_r) & -\sin\left(\theta_r - \frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\theta_r - \frac{4}{3}\pi\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Matrice invertibile ortonormale (inversa = trasposta)

Per particolareizzare il modello al caso di magneti permanenti si deve imporre:

$$i_{kd} = i_{kq} = 0 \quad (17) \quad \text{Non vi sono smorzatori}$$

$$\frac{di_f}{dt} = 0 \quad (18) \quad \text{I magneti permanenti sono rappresentati con circuiti di eccitazione con corrente costante}$$

In particolare, le (14) diventano:

$$\begin{cases} \lambda_d = \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) i_d + \frac{3}{2} L_{md} i_f \\ \lambda_q = \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} \right) i_q \end{cases} \quad (19)$$

Dalle (18) si vede che nel funzionamento a vuoto (senza correnti di statore, $i_d=i_q=0$), il flusso concatenato di fase trasformato prodotto dal solo circuito di eccitazione è:

$$\lambda_d = \frac{3}{2} L_{md} i_f \quad \lambda_q = 0 \quad \text{Flusso concatenato di statore dovuto alla sola eccitazione di rotore}$$

Quindi, considerando che il circuito di eccitazione nel nostro caso è il circuito equivalente ai magneti permanenti (cioè tale da produrre lo stesso flusso dei magneti) possiamo introdurre la variabile:

$$\lambda_m \square \frac{3}{2} L_{md} i_f \quad (20)$$

che rappresenta il flusso concatenato di fase (trasformato in dq0) dovuto ai magneti permanenti.

Considerando le (17)-(20), le equazioni dinamiche (13) diventano:

$$\begin{cases} v_d = R_s i_d + \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s}\right) \frac{d}{dt} i_d - \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s}\right) i_d \\ v_q = R_s i_q + \left(\frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s}\right) \frac{d}{dt} i_q + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s}\right) i_d + \omega_r \lambda_m \\ v_0 = R_s i_0 + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_0 \end{cases} \quad (20)$$

Ossia in forma matriciale:

$$\mathbf{v}_{dq0} = \mathbf{R}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{dq0} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \mathbf{J} \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \boldsymbol{\lambda}_m \quad (21)$$

con:

$$\mathbf{R}_{dq0} = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{pmatrix} \quad \mathbf{L}_{dq0} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} L_{mq} + L_{\sigma s} & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma s} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

L'equazione di coppia (positiva se motrice) si ottiene da quella vista per la macchina sincrona a rotore avvolto:

$$T_m = p \left[\left(\frac{3}{2} L_{md} - \frac{3}{2} L_{mq} \right) i_d i_q + \frac{3}{2} L_{md} (i_f + i_{kd}) i_q - \frac{3}{2} L_{md} i_{kq} i_d \right] \quad (23)$$

ossia, usando la (17) e la (20):

$$T_m = p \left[\left(\frac{3}{2} L_{md} - \frac{3}{2} L_{mq} \right) i_d i_q + \lambda_m i_q \right] \quad (24)$$

Dall'equazione (21) e dalla equazione meccanica (25) si può immediatamente ricavare la forma di stato (come visto per le macchine sincrone e asincrone in precedenza) e rappresentare la stessa forma di stato mediante schema a blocchi per la soluzione numerica dell'equazione differenziale.

Coefficiente di inerzia della
linea d'asse

Coefficiente di attrito

$$T_m - T_r = \frac{J}{p} \frac{d\omega_r}{dt} + \frac{B}{p} \omega_r \quad (25)$$

Numero di coppia polari

MODELLO IN REGIME STAZIONARIO

Come fatto per le macchine sincrone a rotore avvolto, il modello dinamico dato dalle (20) e (24) può essere particolarizzato al funzionamento stazionario annullando le derivate in quanto, in condizioni stazionarie, le correnti di statore formano una terna simmetrica bilanciata che, trasformata secondo la (15), dà componenti i_d e i_q costanti:

$$\begin{aligned}v_d &= R_s i_d - \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) i_d \\v_q &= R_s i_q + \omega_r \left(\frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \right) i_d + \omega_r \lambda_m \\T_m &= p \left[\left(\frac{3}{2} L_{md} - \frac{3}{2} L_{mq} \right) i_d i_q + \lambda_m i_q \right]\end{aligned} \quad (26)$$

Come fatto per le macchine sincrone a rotore avvolto si pone ora:

Ω Velocità angolare elettrica, ovvero frequenza angolare di statore a regime

$$L_d \triangleq \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \quad \text{Induttanza sincrona di asse diretto}$$

$$L_q \triangleq \frac{3}{2} L_{md} + L_{\sigma s} \quad \text{Induttanza sincrona di asse in quadratura}$$

$$V_d \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} v_d \quad V_q \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} v_q \quad \text{Valori costanti di tensione in dq}$$

$$I_d \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} i_d$$

$$I_q \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} i_q$$

Valori costanti di corrente in dq

$$\Lambda_d \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_m$$

Valore massimo del flusso concatenato di una fase dovuto ai magneti permanenti

Con queste definizioni le (26) diventano:

$$V_d = R_s I_d - \Omega L_q I_q$$

$$V_q = R_s I_q + \Omega L_d I_d + \Omega \Lambda_m$$

$$T_m = \frac{3}{2} p \left[(L_d - L_q) I_d I_q + \Lambda_m I_q \right]$$

(27)

Equazioni generali della macchina sincrona a magneti permanenti in regime stazionario

Si osserva che, per risolvere le (27), gli unici parametri da calcolare o conoscere sono:

- la resistenza di una fase di statore R_s
- le induttanze sincrone di asse d e q (L_d, L_q)
- il valore massimo del flusso concatenato da una fase e prodotto dai magneti permanenti (Λ_m)

Per le macchina a magneti permanenti, L_d, L_q e Λ_m sono facilmente e precisamente calcolabili mediante simulazioni agli elementi finiti di tipo magnetostatico.

Le equazioni (28) costituiscono la forma più generale del modello stazionario, che si applica a macchine sincrone a magneti permanenti interni (IPM), cioè dotate di anisotropia.

Lo stesso modello può essere particolarizzato ai casi di macchine a magneti superficiali (SPM) isotrope ($L_d=L_q=L$) e al caso di macchine a riluttanza ($\Lambda_m=0$):

$$V_d = R_s I_d - \Omega L I_q$$

$$V_q = R_s I_q + \Omega L I_d + \Omega \Lambda_m$$

$$T_m = \frac{3}{2} p \Lambda_m I_q$$

(28)

Equazioni della macchina sincrona a magneti permanenti superficiali (SPM) in regime stazionario

$$V_d = R_s I_d - \Omega L_q I_q$$

$$V_q = R_s I_q + \Omega L_d I_d$$

$$T_m = \frac{3}{2} p (L_d - L_q) I_d I_q$$

(29)

Equazioni della macchina sincrona a riluttanza in regime stazionario

Possiamo fare le seguenti osservazioni:

Nella macchina SPM non vi è coppia di riluttanza e la coppia dipende dalla sola componente I_q della corrente di statore. Pertanto, in tutti i casi in cui ciò è possibile, il controllo della macchina SPM è tale da generare una corrente che ha sola componente I_q , in quanto una eventuale componente I_d produrrebbe perdite Joule ma non darebbe alcun effetto in termini di coppia prodotta. Una componente I_d negativa (smagnetizzante) viene applicata solo per ottenere il «deflussaggio» necessario al raggiungimento di alte velocità.

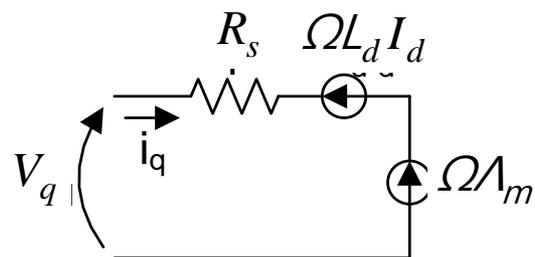
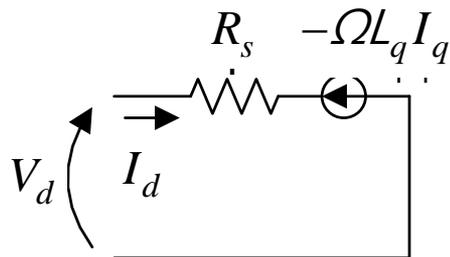
Nelle macchine IPM, la coppia comprende sia un termine dovuto ai magneti permanenti sia un termine (coppia di riluttanza) dovuto all'anisotropia della macchina, cioè alla differenza tra L_d e L_q . Il rapporto L_q/L_d (maggiore di uno per quanto osservato sopra) è denominato «rapporto di salienza» e, in fase di progetto, si cerca di massimizzare tale rapporto per massimizzare la coppia di riluttanza.

Nelle macchine a riluttanza, la coppia comprende solo il termine dovuto all'anisotropia. In misura ancora maggiore che nelle macchine IPM, è fondamentale progettare la macchina in modo da massimizzare il rapporto di salienza per massimizzare la coppia prodotta.

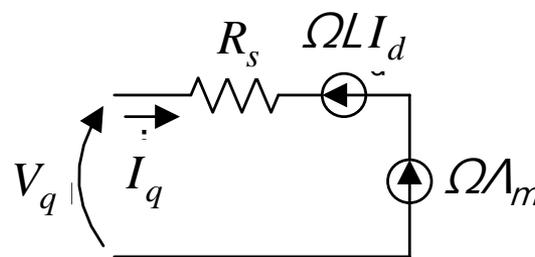
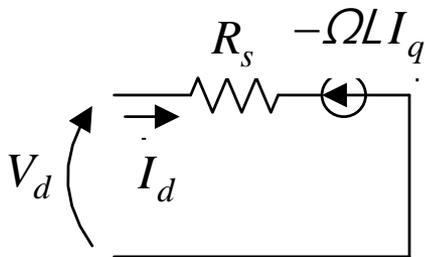
Nelle macchine IPM e a riluttanza, la coppia di riluttanza può essere generata solo se la corrente di statore comprende una componente I_d e una componente I_q ed entrambe sono diverse da zero. Affinchè la coppia di riluttanza sia utile (motrice), essa deve essere positiva e, a tale scopo, si vede che la corrente I_d deve necessariamente essere negativa in quanto $L_q > L_d$ e quindi $L_d - L_q < 0$.

Le equazioni a regime di una macchina a magneti permanenti possono essere anche rappresentate in forma di circuito equivalente.

Macchina a magneti permanenti anisotropa (magneti interni, IPM)



Macchina a magneti permanenti isotropa (magneti superficiali, SPM)



Macchina a riluttanza

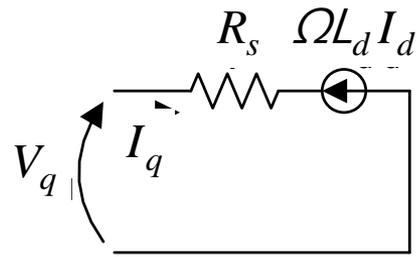
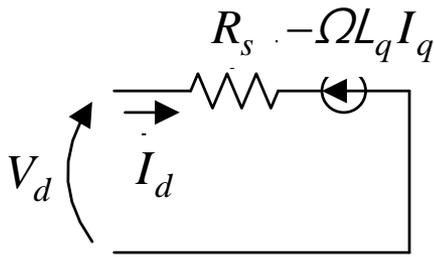


Fig. 20

In base a quanto detto, si conferma (come più volte supposto sopra) che la corrente di statore è, nel funzionamento normale delle macchine a magneti permanenti, smagnetizzante. Infatti, si è visto che, in generale, si ha:

$$I_d \leq 0 \quad (30)$$

Dai circuiti equivalenti di Fig. si osserva che una I_d riduce la tensione $\Omega\Lambda_m$ dovuta ai magneti permanenti. Ciò significa che la corrente è «smagnetizzante», cioè con segno opposto a quello convenzionale assunto, ad esempio, in Fig. 6.

Questo conferma l'ipotesi fatta in precedenza circa il fatto che la corrente di statore, nel funzionamento a carico, ha un effetto smagnetizzante, cioè tale da produrre un campo opposto a quello dei magneti (v. Fig. 9 e relative considerazioni).

Nelle macchine a riluttanza e IPM, il controllo agisce secondo algoritmi del tipo MTPA (maximum torque per Ampere), cioè determina in ogni condizione di funzionamento le componenti I_d e I_q tali da ottenere la coppia richiesta con la minima corrente, ovvero con le minime perdite Joule.

CARATTERISTICHE DI FUNZIONAMENTO A REGIME PER MACCHINE A MAGNETI PERMANENTI

Le macchine a magneti permanenti sono, praticamente sempre, connesse alla rete mediante un convertitore elettronico in quanto non sono adatte all'avviamento diretto con alimentazione da rete. Infatti, esse non sono dotate di gabbia e possono generare coppia utile solo in condizioni di sincronismo.

Il convertitore elettronico applica alla macchina la tensione necessaria alla frequenza corrispondente alla velocità di rotazione desiderata. Vale infatti la solita relazione, vista per le macchine sincrone:

$$n = \frac{60f}{p} \quad (31)$$

che lega velocità di rotazione n [giri/min] alla frequenza.

Si vede quindi che, a regime, il convertitore genera tensione alla frequenza corrispondente alla velocità di rotazione n .

Il problema è: come si determina la tensione e la corrente con cui alimentare la macchina alle varie velocità e ai vari carichi? La risposta dipende dal tipo di controllo che viene implementato. Nella grande maggioranza dei casi, il controllo è del tipo «a orientamento di campo» (FOC) e assume due forme diverse a seconda che la macchina sia isotropa (SPM) o anisotropa (cioè IPM o a riluttanza).

CARATTERISTICA DI FUNZIONAMENTO PER MACCHINA SINCRONA SPM

Per una macchina sincrona SPM le equazioni a regime sono le (28), dove la resistenza di statore R_s è usualmente trascurabile rispetto alle reattanze sincrone. Da queste appare evidente che, ovunque possibile, il convertitore applica una corrente di statore tale che $I_d=0$, mentre la componente I_q («corrente di coppia») è quella necessaria a realizzare la coppia desiderata T_m . Ossia trascurando la resistenza:

$$I_d = 0 \quad (32)$$

$$I = I_q = \frac{T_m}{\frac{3}{2} p \Lambda_m} \quad (33)$$

$$V_d = -\Omega L I_q = -\frac{\Omega L T_m}{\frac{3}{2} p \Lambda_m} \quad (34)$$

$$V_q = \Omega \Lambda_m \quad (35)$$

$$V = \sqrt{V_d^2 + V_q^2} = \Omega \sqrt{\left(\frac{L T_m}{\frac{3}{2} p \Lambda_m}\right)^2 + \Lambda_m^2} \quad (36)$$

Caratteristiche di
funzionamento della
macchina SPM per velocità
inferiori alla velocità base

In particolare, la corrente massima I_{\max} sopportabile dal motore a regime (per limite termico) determina la massima coppia erogabile T_{\max} :

$$T_{\max} = \frac{3}{2} p \Lambda_m I_{\max} \quad (37)$$

La tensione corrispondente alla coppia e corrente massima è, da (36):

$$V(\Omega) = \Omega \underbrace{\sqrt{\left(\frac{LT_{\max}}{\frac{3}{2} p \Lambda_m}\right)^2 + \Lambda_m^2}}_{\text{costante}} \quad (38)$$

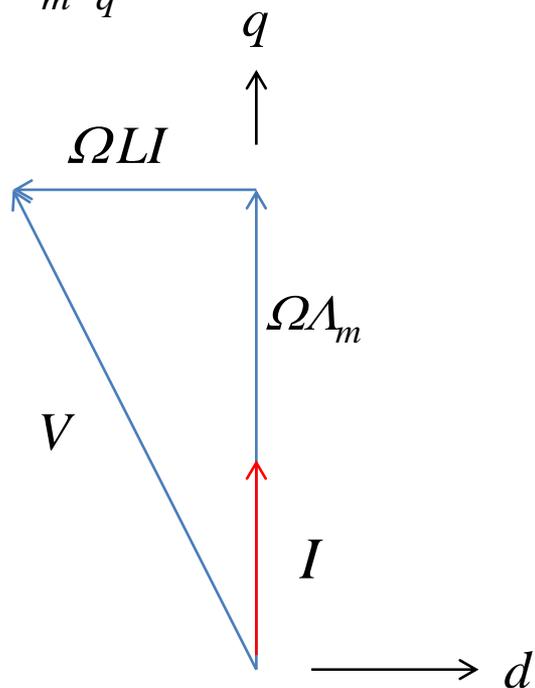
Si vede che la tensione corrispondente alla coppia e corrente massima è direttamente proporzionale alla velocità.

Si dice velocità base quella per cui la tensione (38) uguaglia il valore massimo V_{\max} dipendente dal convertitore.

$$\Omega_b = \frac{V_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{LT_{\max}}{\frac{3}{2} p \Lambda_m}\right)^2 + \Lambda_m^2}} \quad (39)$$

Al di sopra di tale velocità base, non è più possibile erogare la corrente massima (e quindi la coppia massima) restando nei limiti di tensione del convertitore. Pertanto, è necessario, sopra la velocità base, fornire al motore una corrente che ha, oltre alla componente I_q che genera coppia, anche una componente I_d negativa che serve a mantenere la tensione pari al suo valore massimo. Lo si vede anche in termini di diagramma fasoriale (Fig. 21).

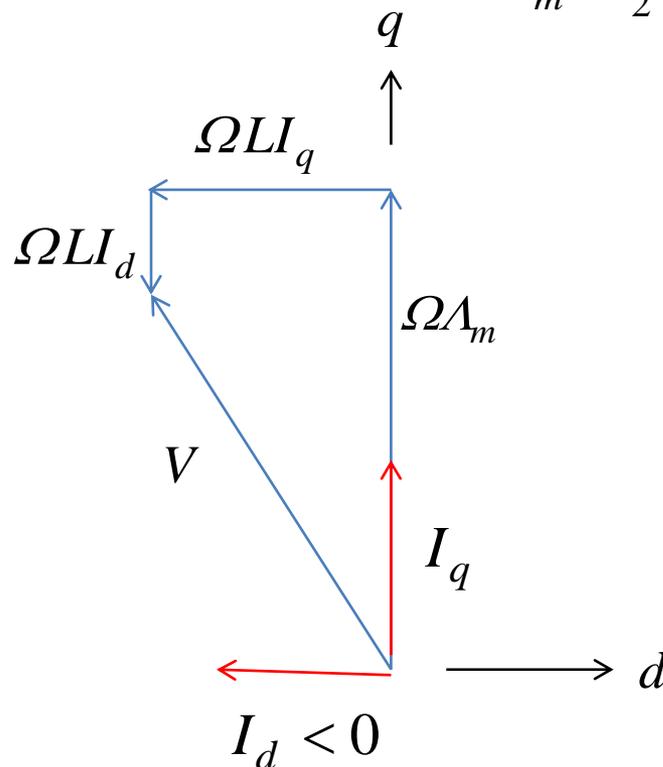
$$T_m = \frac{3}{2} p \Lambda_m I_q$$



Sotto la velocità base: tutta la corrente è orientata secondo l'asse q

Fig. 21

$$T_m = \frac{3}{2} p \Lambda_m I_q$$



Sopra la velocità base: c'è una componente di corrente $I_d < 0$ per tenere la tensione entro il valore massimo

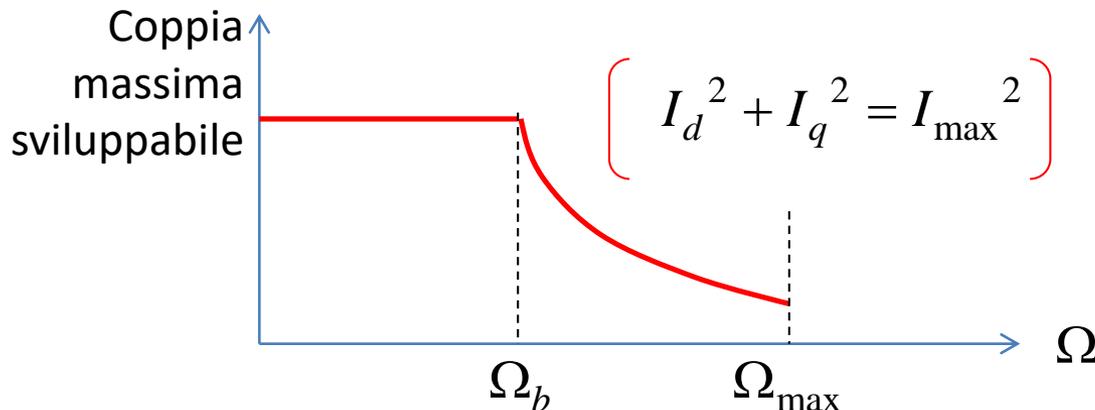
Il regime di funzionamento sopra la velocità base, nel quale viene applicata una corrente I_d negativa prende il nome di «deflussaggio», proprio perchè l'effetto della corrente I_d è quello di opporsi al flusso prodotto dai magneti permanenti, riducendolo.

E' chiaro che, all'aumentare della velocità è necessaria una corrente I_d negativa sempre maggiore. Questo limita la corrente I_q erogabile e, quindi, la coppia che può essere sviluppata, in quanto deve sempre essere:

$$I_d^2 + I_q^2 < I_{\max}^2 \quad (40)$$

A mano a mano che la velocità aumenta, quindi, la coppia sviluppabile dal motore diminuisce sempre più.

Il limite all'aumento di velocità è dato, oltre che da ragioni meccaniche, dalla necessità di evitare rischi di smagnetizzazione del magnete permanente.



CARATTERISTICA DI FUNZIONAMENTO PER MACCHINA SINCRONA IPM e a riluttanza

$$T_m = \frac{3}{2} P \left[\underbrace{(L_d - L_q)}_{<0} I_d I_q + \Lambda_m I_q \right]$$

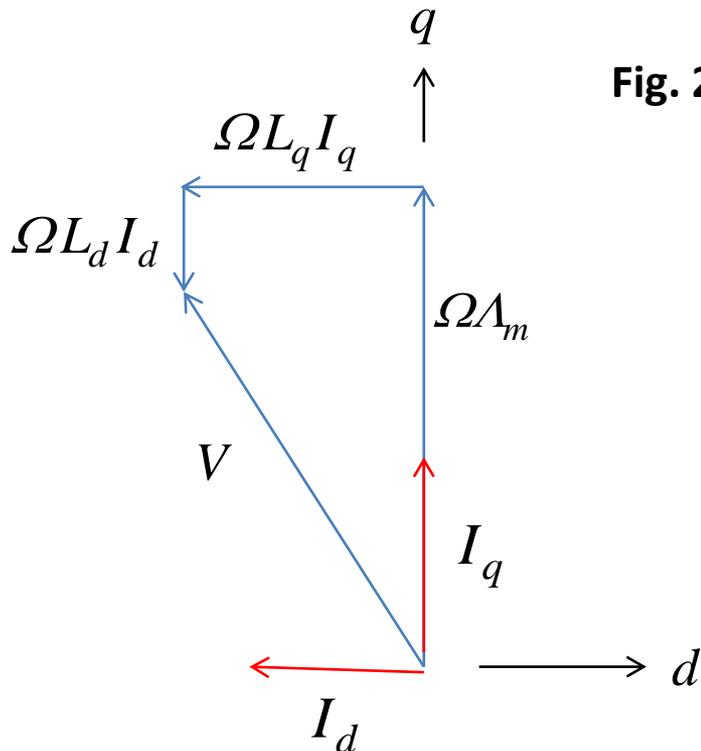


Fig. 22

Nella macchina IPM e in quella a riluttanza, anche a velocità basse viene applicata una corrente I_d negativa allo scopo di sfruttare il termine di riluttanza per produrre coppia motrice. Si ha quindi un diagramma fasoriale come quello di Fig. 22.

Nella macchina IPM e in quella a riluttanza, viene normalmente implementato un algoritmo di controllo noto come MTPA («Maximum Torque per Ampere»).

L'algoritmo MTPA consente di applicare le componenti di corrente I_d e I_q tali che risolvono il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

Funzione obiettivo

$$\text{minimizzare } \left(I_d^2 + I_q^2 \right) \quad (41)$$

vincoli

$$\left\{ \begin{array}{l} I_d^2 + I_q^2 \leq I_{\max}^2 \quad (42) \quad \text{Limite di corrente} \\ V_d^2 + V_q^2 = \left(\Omega L_q I_q \right)^2 + \left(\Omega L_d I_d + \Omega \Lambda_m \right)^2 \leq V_{\max}^2 \quad (43) \quad \text{Limite di tensione} \end{array} \right.$$

$$T_m = \frac{3}{2} p \left[\left(L_d - L_q \right) I_d I_q + \Lambda_m I_q \right] \quad (44) \quad \text{Coppia da sviluppare}$$

Si vede che, nel piano (I_d, I_q) , il limite di corrente è rappresentato da un cerchio, il limite di tensione da un'ellisse con centro nel punto $(-\Lambda_m/L_d, 0)$ mentre il vincolo di coppia da sviluppare è costituito da un'iperbole.

Si può dimostrare che, al variare della velocità, il luogo dei punti (I_d, I_q) che rappresenta la soluzione del problema sopra ha la forma rappresentata in Fig. 23.

Luogo dei punti che soddisfano i tre vincoli

$$(L_q I_q)^2 + (L_d I_d + \Lambda_m)^2 \leq \left(\frac{V_{\max}}{\Omega}\right)^2$$

$$T_m = \frac{3}{2} p \left[(L_d - L_q) I_d I_q + \Lambda_m I_q \right]$$

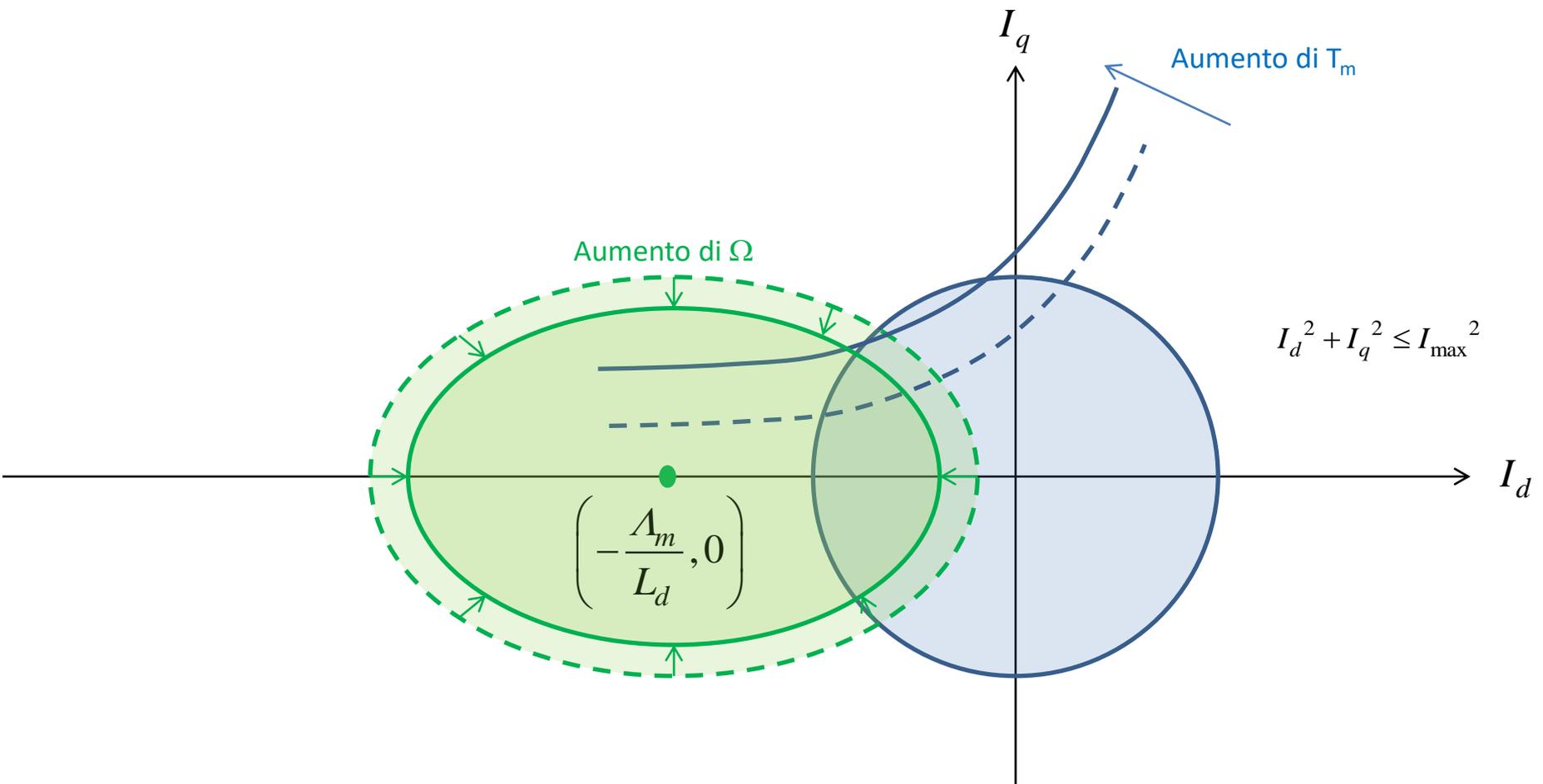
$$I_d^2 + I_q^2 \leq I_{\max}^2$$

$$\left(-\frac{\Lambda_m}{L_d}, 0 \right)$$

Il punto di lavoro ottimo P è quello che, soddisfacendo i tre vincoli, minimizza la distanza dall'origine (segmento OP), cioè minimizza $I_d^2 + I_q^2$

Si nota che il vettore OP coincide con il vettore di corrente (I_d, I_q) ottima applicata al motore

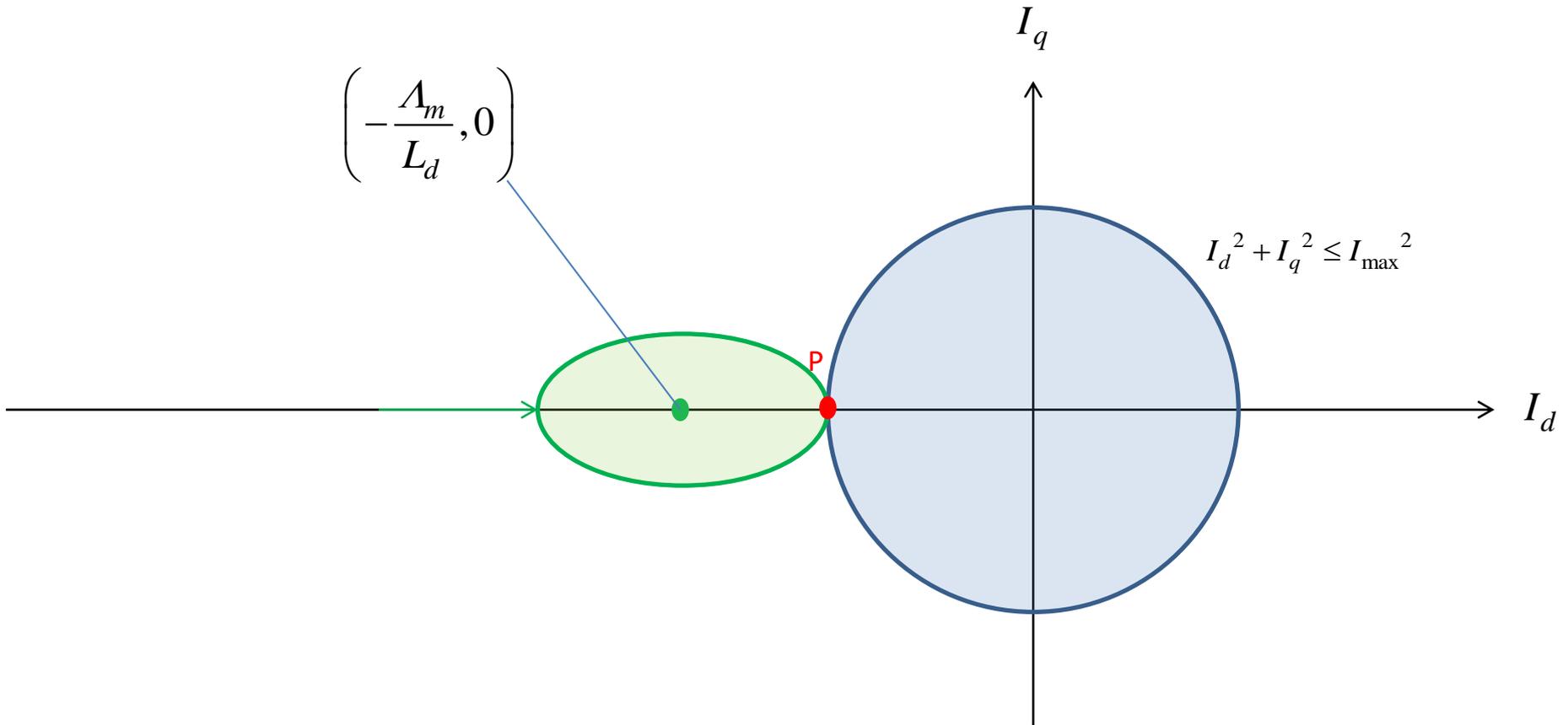
Si osserva che, mentre il cerchio che rappresenta il vincolo di corrente è fisso, l'ellisse che rappresenta il vincolo di tensione si restringe all'aumentare della tensione. Le iperboli «iso-coppia» si spostano verso l'alto all'aumentare di T_m .



La massima velocità è quella per cui l'ellisse (limite di tensione) diventa tangente alla circonferenza (limite di corrente).

In tal caso la regione ammissibile si riduce a un punto P (punto di tangenza tra le due curve) che giace sull'asse $I_q=0$.

In questo caso quindi la coppia è zero e tutta la corrente I_{\max} è smagnetizzante.



Naturalmente per la macchina a riluttanza $\Lambda_m=0$ e quindi il limite di tensione è rappresentato da un'ellisse centrata nell'origine.

