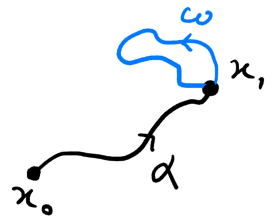
Dipendenza dal punto base



$x_0, x_1 \in X$, $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$

cammino con $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$

$\omega \in \Omega(X, x_1) \rightsquigarrow \alpha \cdot \omega \cdot \bar{\alpha} \in \Omega(X, x_0)$

$\omega' \in \Omega(X, x_1)$, $\omega \simeq_{\{0,1\}} \omega' \Rightarrow \alpha \cdot \omega \cdot \bar{\alpha} \simeq_{\{0,1\}} \alpha \cdot \omega' \cdot \bar{\alpha}$

$\alpha' : [0,1] \longrightarrow X$ cammino tra x_0, x_1

$\alpha \simeq_{\{0,1\}} \alpha' \Rightarrow \alpha \cdot \omega \cdot \bar{\alpha} \simeq_{\{0,1\}} \alpha' \cdot \omega \cdot \bar{\alpha}'$

Teorema La funzione $\alpha_* : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, $\alpha_*([\omega]) \overset{def}{=} [\alpha \cdot \omega \cdot \bar{\alpha}]$, è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi, con $(\alpha_*)^{-1} = \bar{\alpha}_*$.

Se $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \alpha'$ allora $\alpha_* = \alpha'_*$.

Dim α_* è ben definita e $\alpha_* = \alpha'_*$ per quanto osservato sopra. Mostriamo che α_* è un omomorfismo.

$$\alpha_*([\omega_1][\omega_2]) = \alpha_*([\omega_1 \cdot \omega_2]) = [\bar{\alpha} \cdot (\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \alpha] =$$
$$= [\bar{\alpha} \cdot \omega_1 \cdot \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \omega_2 \cdot \alpha] = \alpha_*([\omega_1])\, \alpha_*([\omega_2]).$$

Si ha $\bar{\alpha}_* = (\alpha_*)^{-1}$ $\boxed{E}$ $\Rightarrow$ α_* isomorfismo.

Teorema Siano $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ cammini t.c. $\alpha(1) = \beta(0)$. Allora $(\alpha \cdot \beta)_* = \alpha_* \circ \beta_*$. $\boxed{E}$

Corollario Se X è connesso per archi allora $\pi_1(X, *)$ è indipendente da $* \in X$ a meno di isomorfismi e possiamo denotarlo con $\pi_1(X)$.

OSS $\pi_1(X)$ è ben definito a meno di isomorfismo se X è connesso per archi. Tuttavia in generale

$$\alpha_*: \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$$

dipende dalla classe d'omotopia (rel $\{0,1\}$) di α.

Corollario Sia X connesso per archi e siano $x_0, x_1 \in X$. Se $\pi_1(X)$ è abeliano allora l'isomorfismo

$$\alpha_*: \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$$

non dipende da α. Quindi $\pi_1(X)$ è ben definito a meno di <u>isomorfismo canonico</u> se è abeliano.

Dim $\alpha, \beta: [0,1] \longrightarrow X$ cammini tra x_0 e x_1

$$\left(\alpha_* \circ (\beta_*)^{-1}\right)([\omega]) = (\alpha \cdot \bar{\beta})([\omega]) = [\alpha \cdot \bar{\beta} \cdot \omega \cdot \overline{\alpha \cdot \bar{\beta}}]$$

$$= [\alpha \cdot \bar{\beta}] \cdot [\omega] \cdot [\alpha \cdot \bar{\beta}]^{-1} = [\omega]$$

perché $[\alpha \cdot \bar{\beta}] \in \pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_0)$ abeliano.

$$\Rightarrow \alpha_* \circ (\beta_*)^{-1} = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)} \Rightarrow \alpha_* = \beta_* .$$

Def Sia X connesso per archi. L'<u>abelianizzato</u> del gruppo fondamentale si denota con

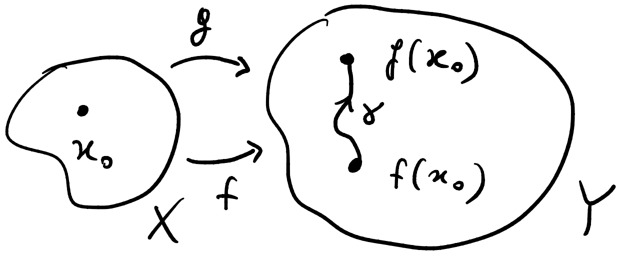
$$H_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} Ab(\pi_1(X))$$

e si chiama <u>primo gruppo d'omologia</u>.

OSS In modo simile si fa vedere che $H_1(X)$ non dipende dal punto base a meno di isomorfismi canonici indotti da cammini.

Teorema Siano X e Y connessi per archi e siano $f, g : X \to Y$ applicazioni continue omotope. Fissiamo un punto base $x_0 \in X$. Allora esiste un cammino $\gamma : [0,1] \to Y$ tra $f(x_0)$ e $g(x_0)$ t.c. $f_* = \gamma_* \circ g_*$. In particolare, f_* è un isomorfismo se e solo se g_* è un isomorfismo.

Dim



$H : X \times [0,1] \to Y$ omotopia

$h_0 = f, \; h_1 = g$

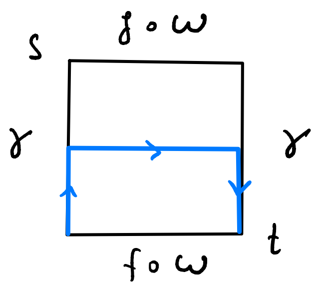
$\gamma : [0,1] \to Y, \quad \gamma(s) := H(x_0, s) = h_s(x_0).$

$\omega \in \Omega(X, x_0) \quad \rightsquigarrow \quad K : [0,1] \times [0,1] \to Y$

$K(t,s) = H(\omega(t), s)$

$k_0 = f \circ \omega, \; k_1 = g \circ \omega$

$k_s(0) = \gamma(s) = k_s(1)$



Interpolazione tra $(t, 0)$ per $s = 0$ e $\alpha(t)$ per $s = 1$

$L : [0,1] \times [0,1] \to Y$

$$L(t,s) = K\big((1-s)(t,0) + s\,\alpha(t)\big)$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, 3t), & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ (3t-1, 1), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ (1, 3-3t), & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\boxed{\alpha}$

$\ell_0 = f \circ \omega$

$\ell_1 = \gamma \cdot (g \circ \omega) \cdot \bar{\gamma}$

$\ell_s(0) = f(x_0) = \ell_s(1).$

$$\Rightarrow \quad f_*([\omega]) = [f \circ \omega] = [\gamma \cdot (g \circ \omega) \cdot \bar{\gamma}] = (\gamma_* \circ g_*)([\omega])$$

Corollario Siano X e Y connessi per archi e sia $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è un isomorfismo.

Dim $g : Y \to X$ inversa omotopica di f.

$g \circ f \simeq id_X \implies g_* \circ f_*$ isomorfismo $\implies f_*$ iniettiva

$f \circ g \simeq id_Y \implies f_* \circ g_*$ isomorfismo $\implies f_*$ suriettiva.

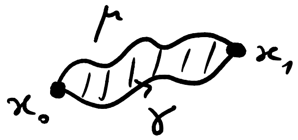
Quindi il gruppo fondamentale è invariante, a meno di isomorfismi, per equivalenze omotopiche.

Corollario Sia $A \subset X$ un sottospazio connesso per archi. Se A è retratto per deformazione debole di X allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$, con $a \in A$.

Corollario Se X è contraibile allora $\pi_1(X) \cong 0$.

Def Uno spazio X è semplicemente connesso (o 1-connesso) se $\forall\, x_0, x_1 \in X \ \exists\ \gamma : [0,1] \to X$ cammino tra x_0 e x_1, unico a meno di omotopia rel $\{0,1\}$.

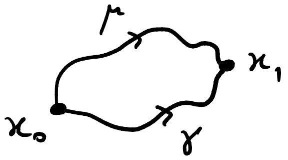
Cioè se $\mu : [0,1] \to X$ è un altro cammino tra x_0 e x_1 allora $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \mu$.



OSS Semplicemente connesso $\implies$ connesso per archi.

Teorema Uno spazio X è semplicemente connesso se e solo se X è connesso per archi e $\pi_1(X) \cong 0$.

Dim $\boxed{\Longrightarrow}$ ovvio



$\boxed{\Leftarrow}$ $x_0, x_1 \in X$, $\gamma, \mu : [0,1] \to X$ cammini tra x_0 e x_1.

$$\gamma \cdot \bar{\mu} \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow [\gamma \cdot \bar{\mu}] = 1 \Rightarrow \gamma \cdot \bar{\mu} \simeq_{\{0,1\}} *$$

$$\Rightarrow \gamma \cdot \bar{\mu} \cdot \mu \simeq_{\{0,1\}} * \cdot \mu \Rightarrow \gamma \simeq_{\{0,1\}} \mu .$$

Corollario Se X è contraibile allora X è semplicemente connesso.

Teorema $X_0 \simeq X_1$ e $Y_0 \simeq Y_1 \Rightarrow X_0 \times Y_0 \simeq X_1 \times Y_1$.

Dim $f : X_0 \to X_1$, $g : Y_0 \to Y_1$ equiv. omotopiche

$l : X_1 \to X_0$, $k : Y_1 \to Y_0$ inverse omotopiche

$$f \times g : X_0 \times Y_0 \to X_1 \times Y_1$$

$$l \times k : X_1 \times Y_1 \to X_0 \times Y_0$$

Sono tra loro inverse omotopiche $\boxed{E}$

Teorema Siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ punti base. Allora $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Dim $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ proiezioni canoniche

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$\varphi([\omega]) = (p_{1*}([\omega]), p_{2*}([\omega])) \quad \text{omomorfismo.}$$

$$\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) \ni \omega : [0,1] \longrightarrow X \times Y \rightsquigarrow \omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$$

$$\omega_1 \in \Omega(X, x_0), \quad \omega_2 \in \Omega(Y, y_0) \qquad \Downarrow$$

$$\varphi([\omega]) = ([\omega_1], [\omega_2]). \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2)$$

$$\psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

$$\psi([\omega_1], [\omega_2]) = [(\omega_1, \omega_2)] \quad \text{ben definita}$$

$$\varphi \circ \psi = id, \quad \psi \circ \varphi = id \qquad \boxed{E}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ e } \psi = \varphi^{-1} \text{ isomorfismi.}$$