Uniforme continuità, successioni e compattezza:

1. **Acerbi Modica Spagnolo n. 117**
   Sia $f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione tale che:
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{xln(x)} = L$$
   Dimostrare che, se $L \neq 0$ si ha
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = c \qquad \forall c > 0$$
   Dire se l'affermazione è ancora valida nel caso L=0.

2. Sia $f : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
   Mostrare che f è uniformemente continua.

3. Una funzione $f : I \to R$ è lispschitziana se esiste una costante L tale che $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$, $\forall x, y \in I$. Dimostrare che se una funzione è lipschitziana, allora è uniformemente continua.

4. Usando l'esercizio precedente dimostrare che $f(x) = sen(x)$ è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$. (analogamente si dimostra che $cos(x)$ è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.)

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo $T > 0$, ovvero T è il minimo valore positivo per cui si ha $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che f è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.

6. **Acerbi Modica Spagnolo n. 27**
   Dimostrare che la successione reale
   $$a_n = \frac{1}{n^2} log(1 + 2e^n)$$
   è monotona e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.

Riferimenti online

`http://www.mat.uniroma3.it/didattica_interattiva/aa_03_04/am1b/UNIFC01.pdf`