

ALGORITMO DI BELLMAN-FORD
ALGORITMO DI DIJKSTRA

ALGORTIMI E STRUTTURE DATI



Dijkstra

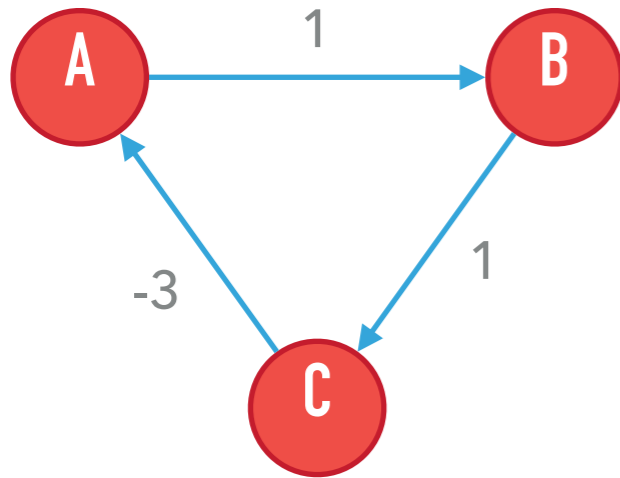
IL PROBLEMA CHE VOGLIAMO RISOLVERE

- ▶ Il peso di un percorso $p = (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ è la somma dei pesi di tutti gli archi: $w(p) = \sum_{i=1}^n w_{v_i, v_j}$
- ▶ Assumiamo di volere solo percorsi **semplici**, ovvero privi di cicli (ogni nodo al più una volta in ogni percorso)
- ▶ Dato un grafo si vuole trovare il percorso **di peso minore** tra un vertice di partenza s e tutti gli altri vertici (o verso un vertice di destinazione d)

IL PROBLEMA CHE VOGLIAMO RISOLVERE

- ▶ Il grafo può essere orientato o non orientato
- ▶ A seconda delle assunzioni che facciamo sui pesi possiamo utilizzare algoritmi diversi:
 - ▶ I pesi possono essere negativi:
algoritmo di Bellman-Ford
 - ▶ I pesi sono solo non negativi:
algoritmo di Dijkstra

IL CASO DA EVITARE: CICLI NEGATIVI



Quale è il percorso meno costoso per andare da A a sé stesso?

Intuitivamente diremmo "il percorso vuoto" che ha costo zero

Ma il percorso (A,B),(B,C),(C,A) ha peso totale -1

Quindi non esiste un percorso più corto, dato che possiamo sempre accorciare facendo "un altro giro"

Assumiamo assenza di cicli di peso negativo

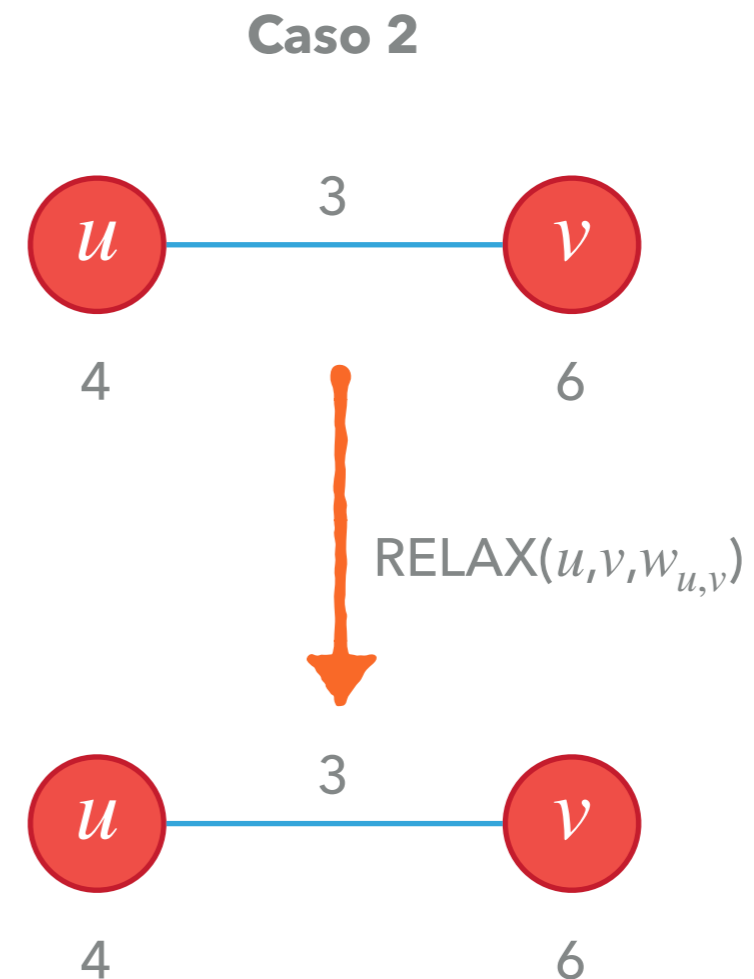
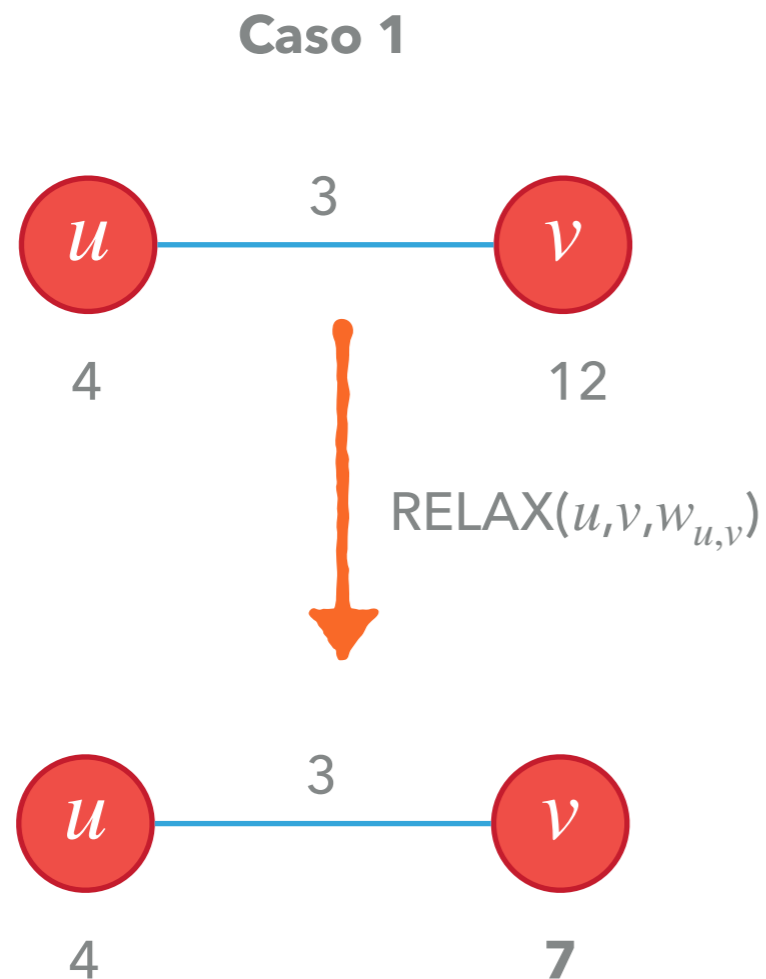
OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

- ▶ $\delta(u, v) = \min\{w(p) \mid p : u \longrightarrow v \text{ semplice}\}$
- ▶ Lemma: Sia $(u, v) \in E$, allora $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w_{u,v}$
- ▶ Supponiamo di avere una stima della del peso del percorso da s ad un nodo u , indicata con $\text{distanza}[u]$, e ad un nodo v , indicata con $\text{distanza}[v]$ e che esista l'arco (u, v) di peso $w_{u,v}$
- ▶ L'operazione di rilassamento consiste nel vedere se possiamo usare la nostra stima per u per migliorare la stima della distanza per v

OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

- ▶ Se $\text{distanza}[u] + w_{u,v} < \text{distanza}[v]$ allora possiamo andare da s a v passando per u con un costo minore
- ▶ Se quello è il caso aggiorniamo la nostra stima della distanza: $\text{distanza}[v] = \text{distanza}[u] + w_{u,v}$
- ▶ Altrimenti non la modifichiamo
- ▶ Indichiamo questa operazione come $\text{RELAX}(u, v, w_{u,v})$

OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI



```
if distanza[u] + w < distanza[v]
    distanza[v] = distanza[u] + w
    predecessore[v] = u
```

OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

- ▶ Assumiamo che (u,v) appartenga ad un cammino minimo da s a v .
- ▶ Assumiamo che prima di RELAX, valga $distanza[u] = \delta(s, u)$
- ▶ Allora dopo $RELAX(u, v, w_{u,v})$, varrà $distanza[v] = \delta(s, v)$
- ▶ In generale, si dimostra facilmente che se $d[u] \geq \delta(s, u)$ prima di relax, allora $d[u] \geq \delta(s, u)$ anche dopo relax.

IDEA GENERALE: ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

- ▶ Il percorso più lungo in un grafo di $|V|$ nodi è composto da al più $|V| - 1$ archi (altrimenti siamo in un ciclo)
- ▶ Se effettuiamo $|V| - 1$ operazioni di rilassamento per ogni arco allora abbiamo che le nostre stime delle distanze non si possono più modificare
- ▶ Abbiamo quindi trovato il percorso di peso/costo minimo da s a ogni altro nodo

PSEUDOCODICE

Parametri: grafo G , nodo sorgente s

inizialmente impostiamo distanza e predecessore di tutti i nodi

for all $v \in V$:

 distanza[v] = $+\infty$

 predecessore[v] = None

e poi impostiamo il nodo s come sorgente a distanza 0

distanza[s] = 0

for i in range(0, $|V| - 1$)

 for all $(u, v) \in E$ # effettuiamo il rilassamento di tutti gli archi

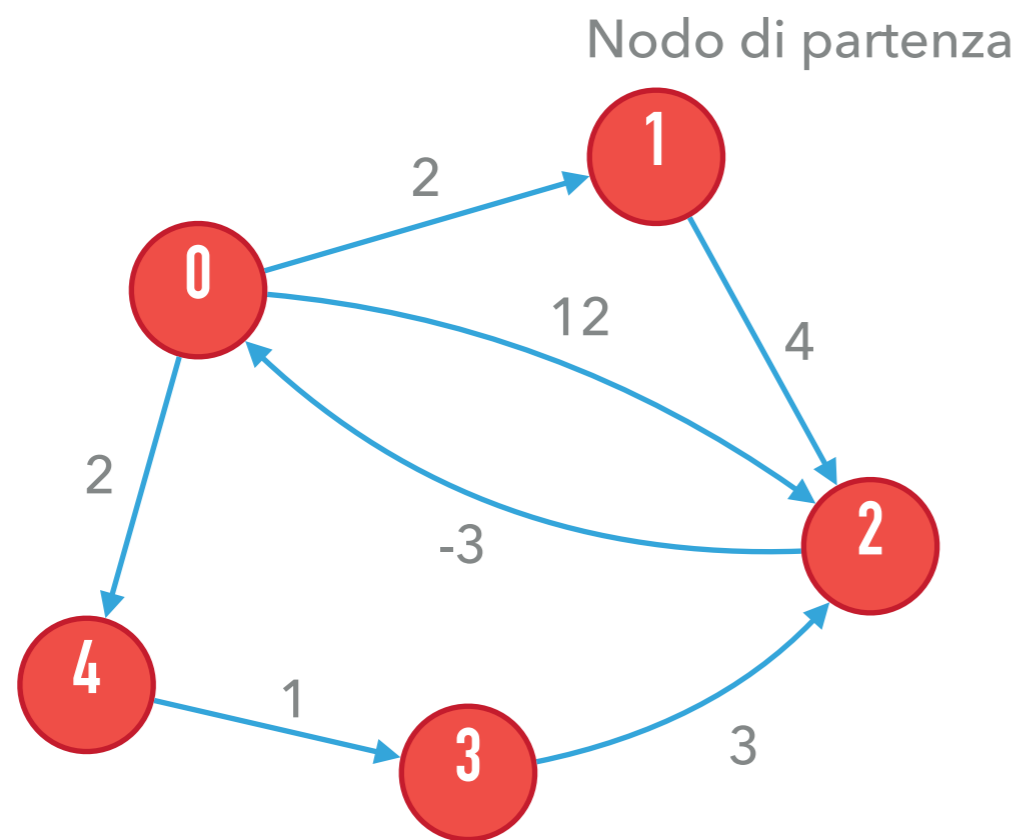
 RELAX($u, v, w_{u,v}$)

SE DOPO $|V| - 1$ ITERAZIONI FOSSE ANCORA POSSIBILE AGGIORNARE LE DISTANZE SIGNIFICHEREBBE CHE IL GRAFO CONTIENE UN CICLO NEGATIVO: POSSIAMO USARE L'ALGORITMO PER IDENTIFICARE QUESTO TIPO DI GRAFI

CICLI DI PESO NEGATIVO

- ▶ Sia $c : v_0, v_1, \dots, v_k$ un ciclo semplice ($v_0 = v_k$, tutti gli altri vertici diversi).
- ▶ c ha peso negativo ($w(c) < 0$) solo se a fine algoritmo esiste $(u, v) \in E$ tale che $\text{distanza}[v] > \text{distanza}[u] + w_{u,v}$
- ▶ Per assurdo, se $c : v_0, v_1, \dots, v_k$ ha peso negativo ma $\text{distanza}[v_i] \leq \text{distanza}[v_{i-1}] + w_{i-1,i}$ allora
 - ▶ $\sum_{i=1}^k \text{distanza}[v_i] \leq \sum_{i=1}^k \text{distanza}[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^k w_{i-1,i}$ e quindi
 - ▶ $\sum_{i=1}^k w_{i-1,i} \geq 0$, assurdo.

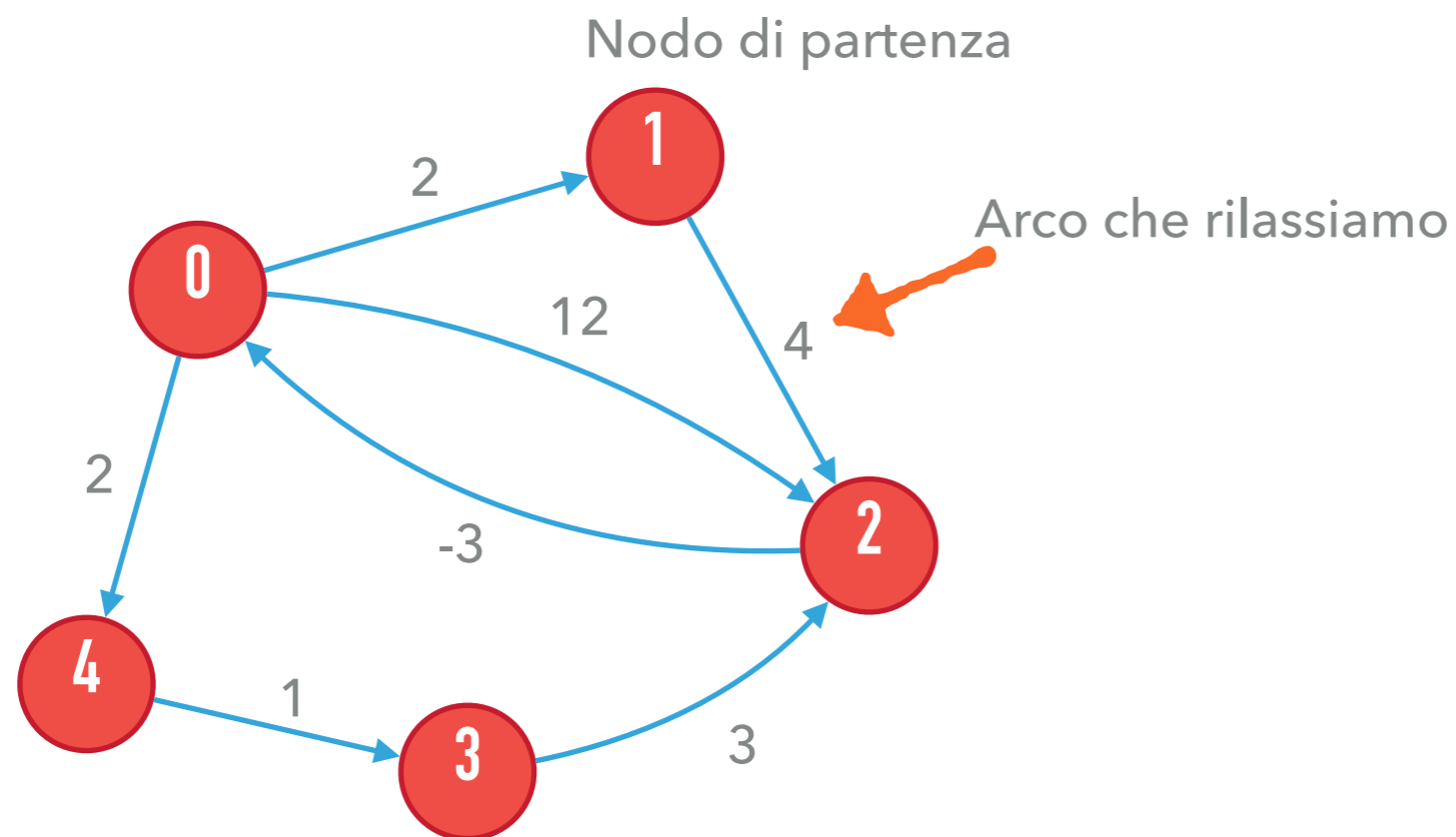
ESEMPIO DI ESECUZIONE



Per l'esempio usiamo un grafo orientato, altrimenti non potremmo mai avere pesi negativi (avremmo un ciclo negativo)

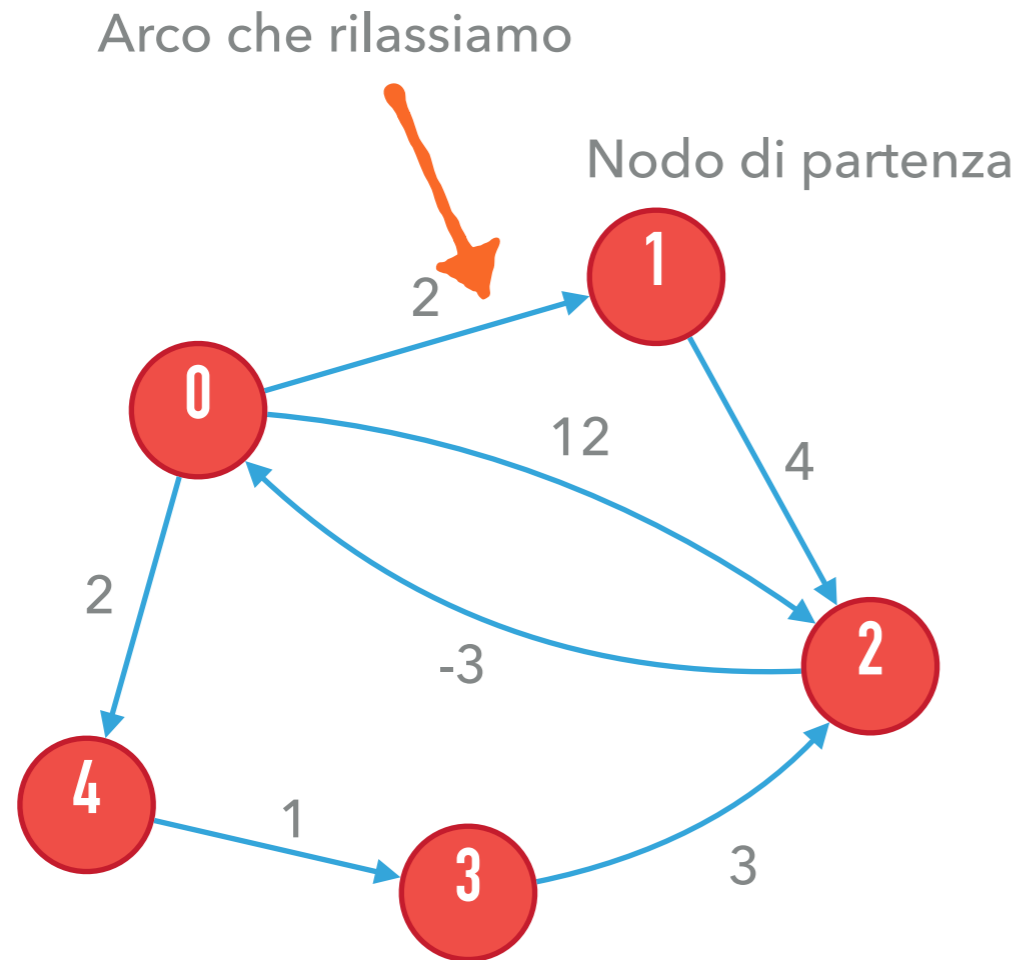
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	∞
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



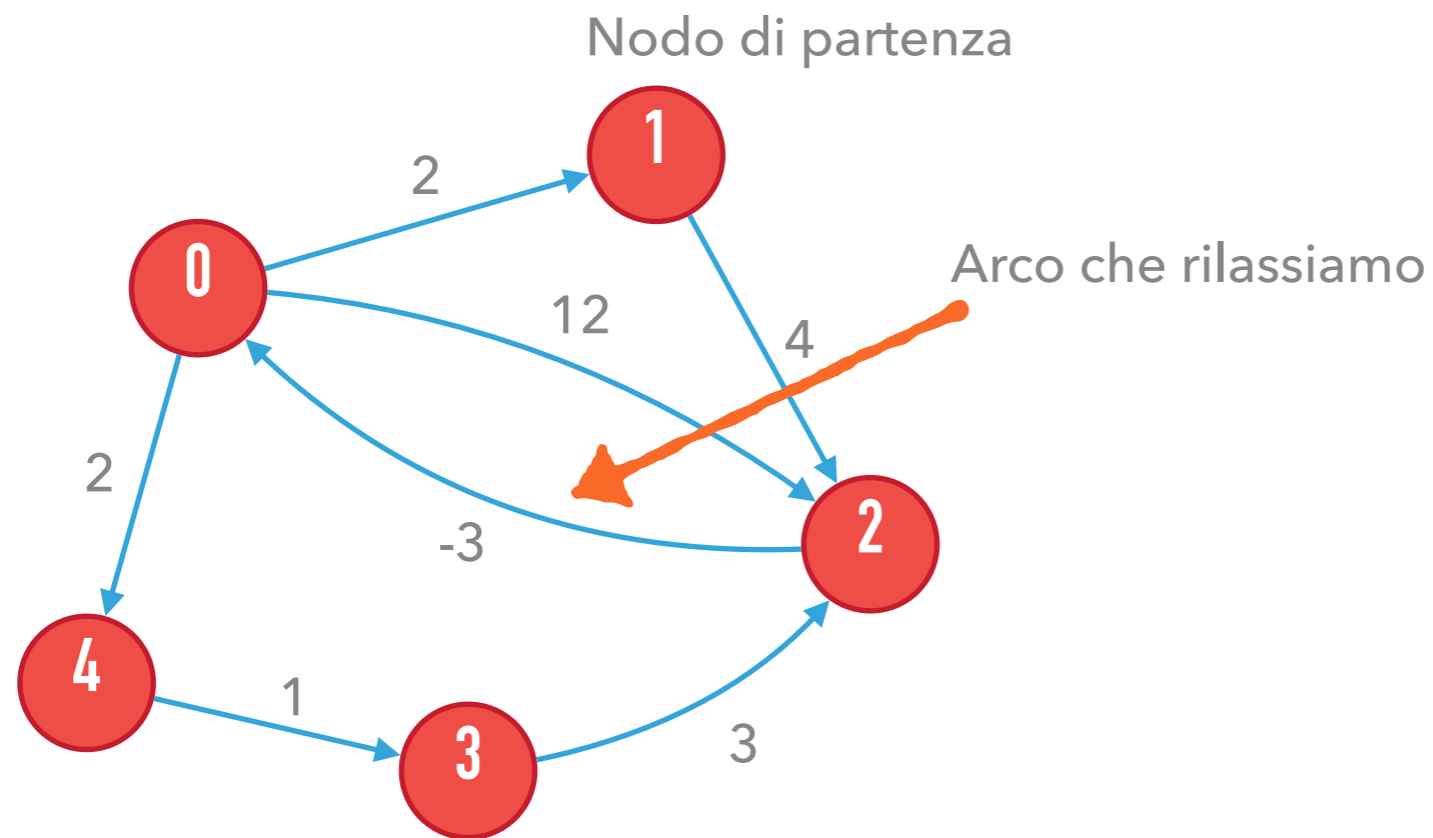
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



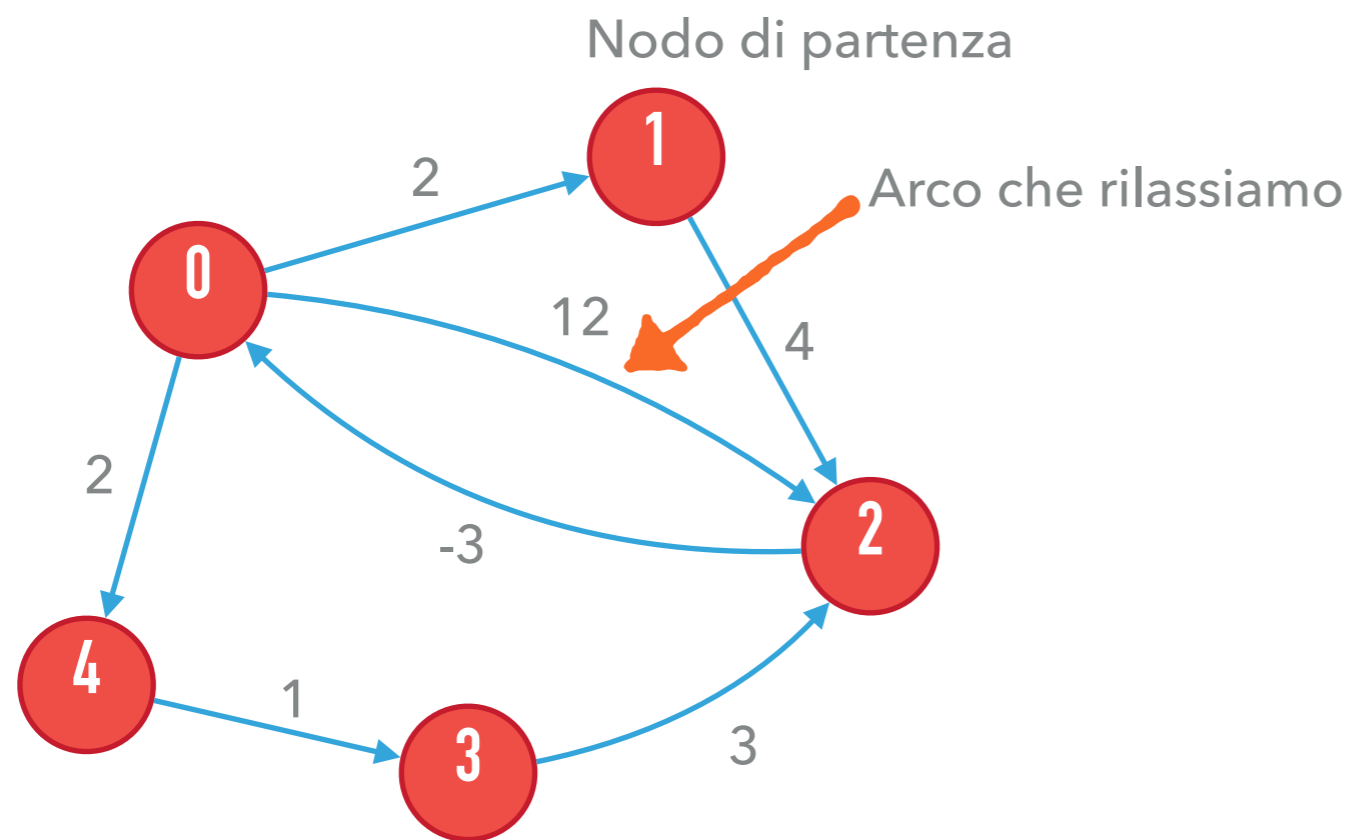
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



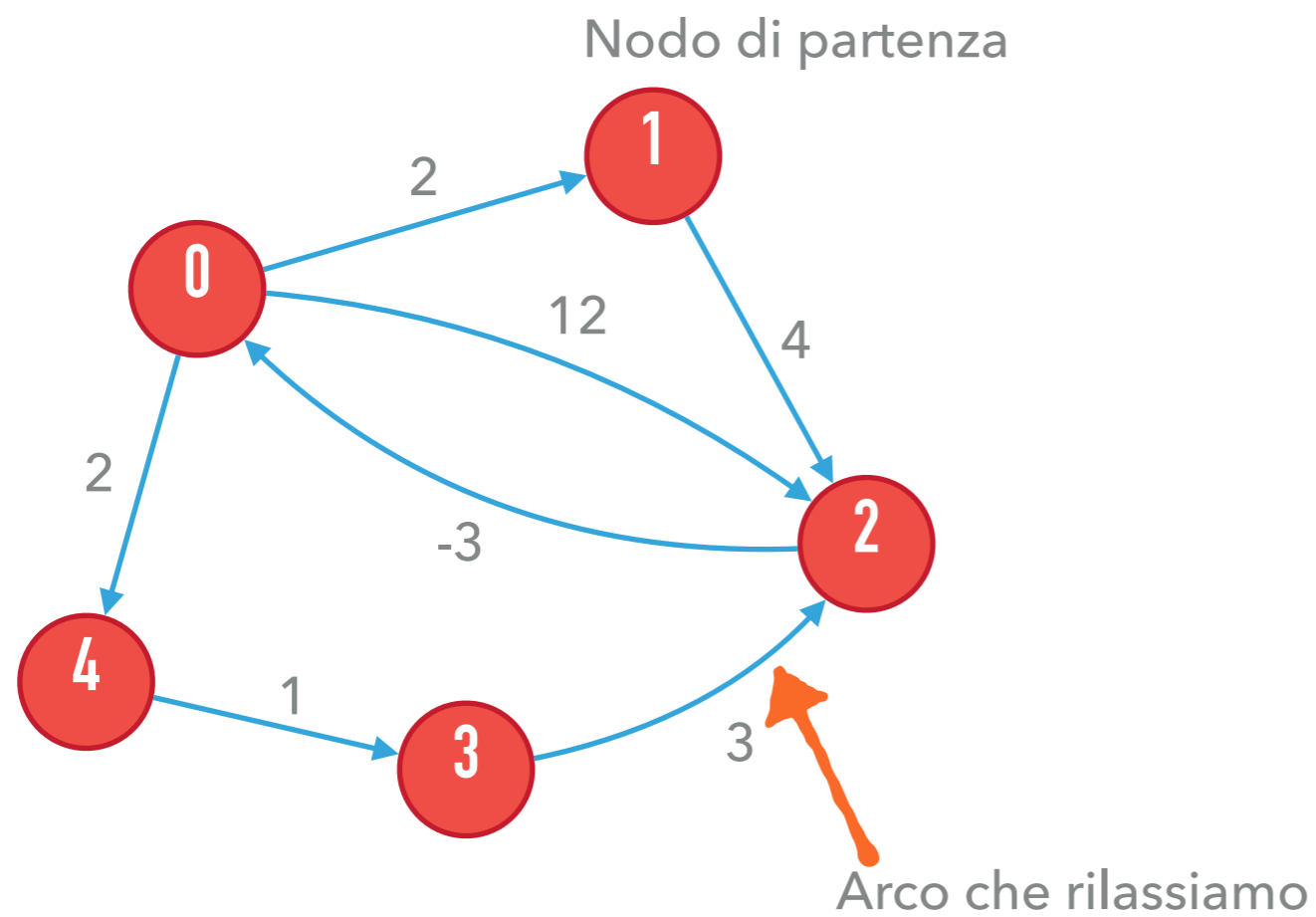
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



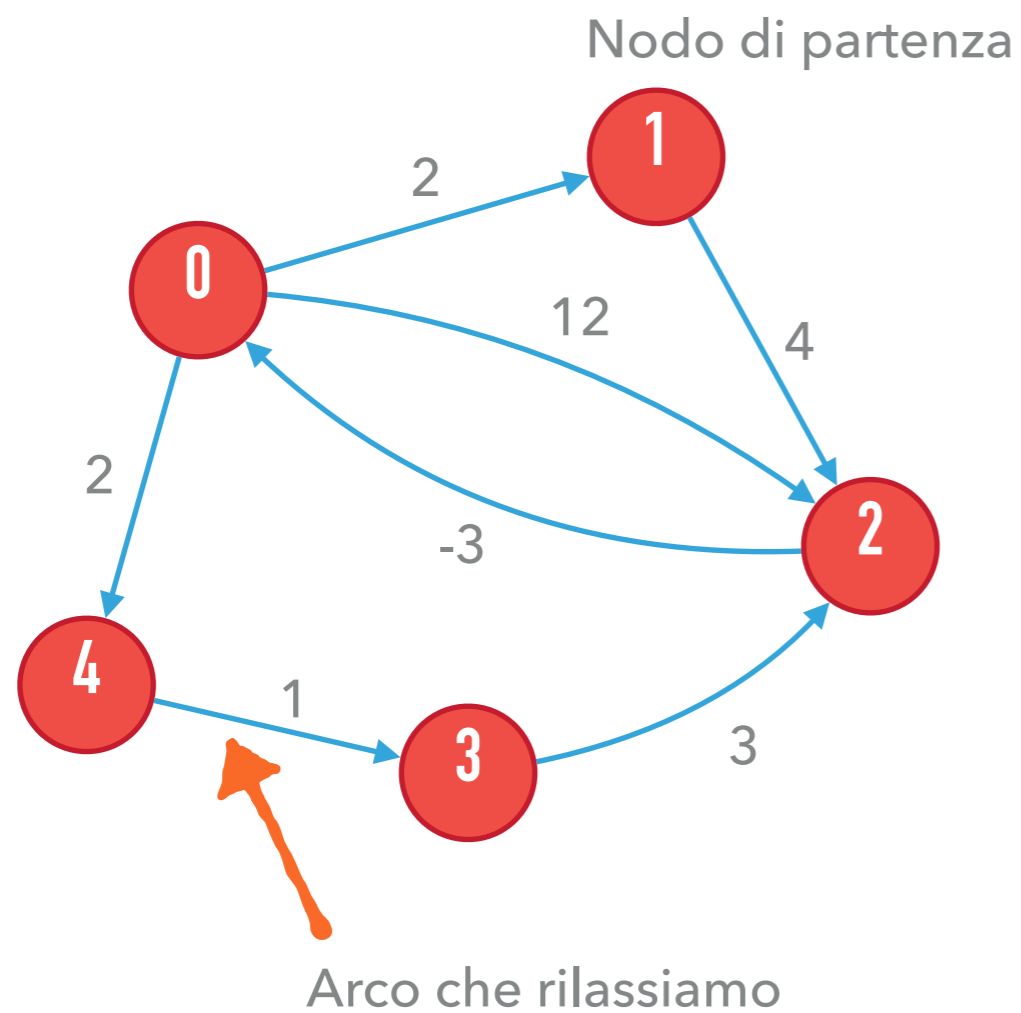
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



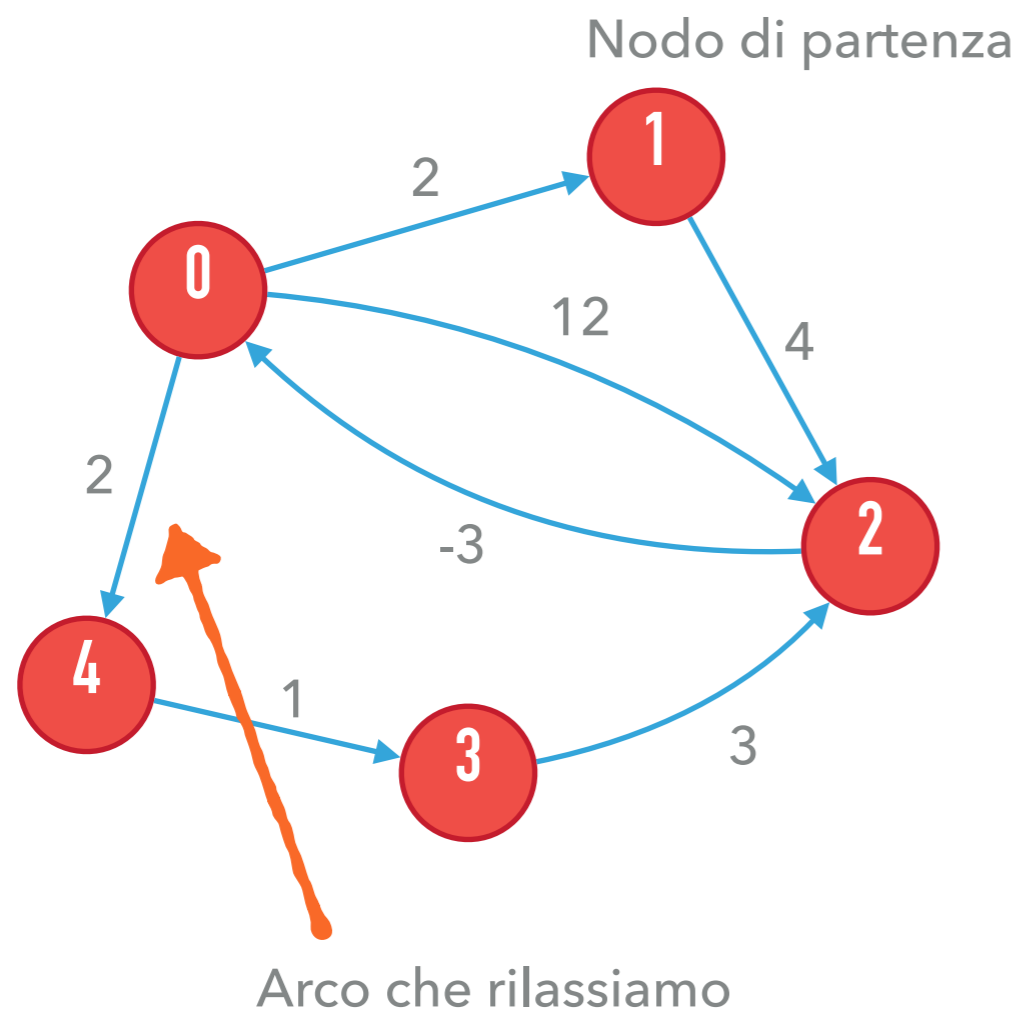
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

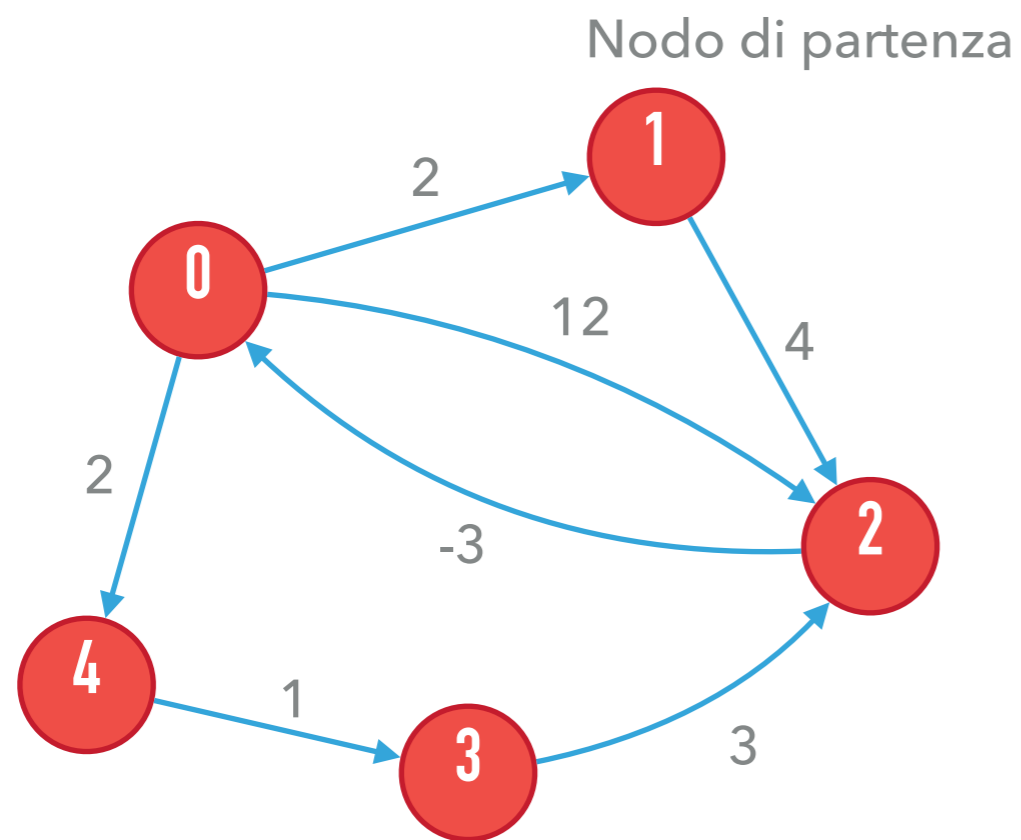
ESEMPIO DI ESECUZIONE



Ora svolgiamo altre 3 iterazioni su tutti i nodi...

Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	3

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Ottenendo questo risultato:

Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	4
4	3

ALGORITMO DI BELLMAN-FORD: COMPLESSITÀ

- ▶ La singola operazione di rilassamento richiede tempo costante
- ▶ Ogni iterazione del ciclo interno richiede $O(E)$ operazioni di rilassamento
- ▶ Ed il ciclo esterno esegue $O(V)$ volte
- ▶ Il costo totale è quindi $O(VE)$
- ▶ Peggior di $O(V + E)$ richiesto da BFS nel caso di grafo non pesato (o con pesi tutti uguali alla stessa costante positiva)

ALGORITMO DI DIJKSTRA

- ▶ L'algoritmo di Dijkstra è applicabile nel caso più ristretto in cui tutti i pesi sono **non negativi**
- ▶ Questo caso si presenta spesso in casi pratici: tempi di percorrenza, distanze in km, etc
- ▶ Rispetto all'algoritmo di Bellman-Ford riesce ad essere più efficiente sfruttando una coda di priorità: una struttura dati che permette di inserire elementi e rimuovere l'elemento di valore minimo

IDEA GENERALE: ALGORITMO DI DIJKSTRA

- ▶ Teniamo una lista di nodi non visitati
- ▶ Il nodo iniziale ha distanza 0 e tutti gli altri infinito
- ▶ Prendiamo il nodo v con distanza minima tra quelli non visitati:
 - ▶ Per ogni vicino aggiorniamo la distanza vedendo se possiamo raggiungerlo più velocemente passando da v
 - ▶ Rimuoviamo v dalla lista dei nodi non visitati
- ▶ Continuiamo finché non possiamo più aggiornare le distanze dei nodi

PSEUDOCODICE

Parametri: grafo G , nodo sorgente s

inizialmente impostiamo distanza e predecessore di tutti i nodi

for all $v \in V$:

 distanza[v] = $+\infty$ # indichiamo distanza[v] anche come $d[v]$

 predecessore[v] = None

distanza[s] = 0 # e poi impostiamo il nodo s come sorgente a distanza 0

$S = \{\}$ # insieme dei nodi già visitati (inizialmente vuoto)

$Q = \text{coda_di_priorità}(V)$ # coda di priorità con tutti i vertici già inseriti

while Q is non-empty

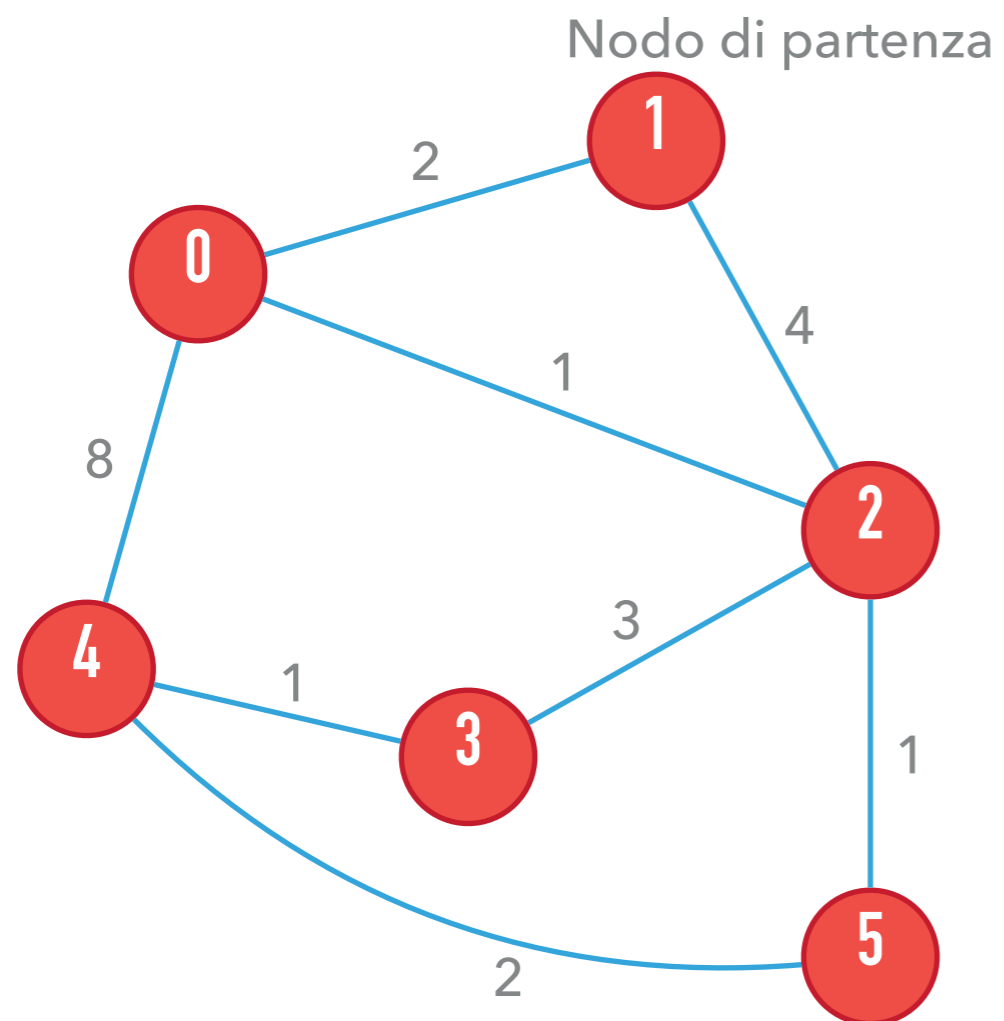
$u = \text{estrai_minimo}(Q)$ # estraiamo il prossimo vertice

$S = S \cup \{u\}$ # lo inseriamo nella lista dei visitati

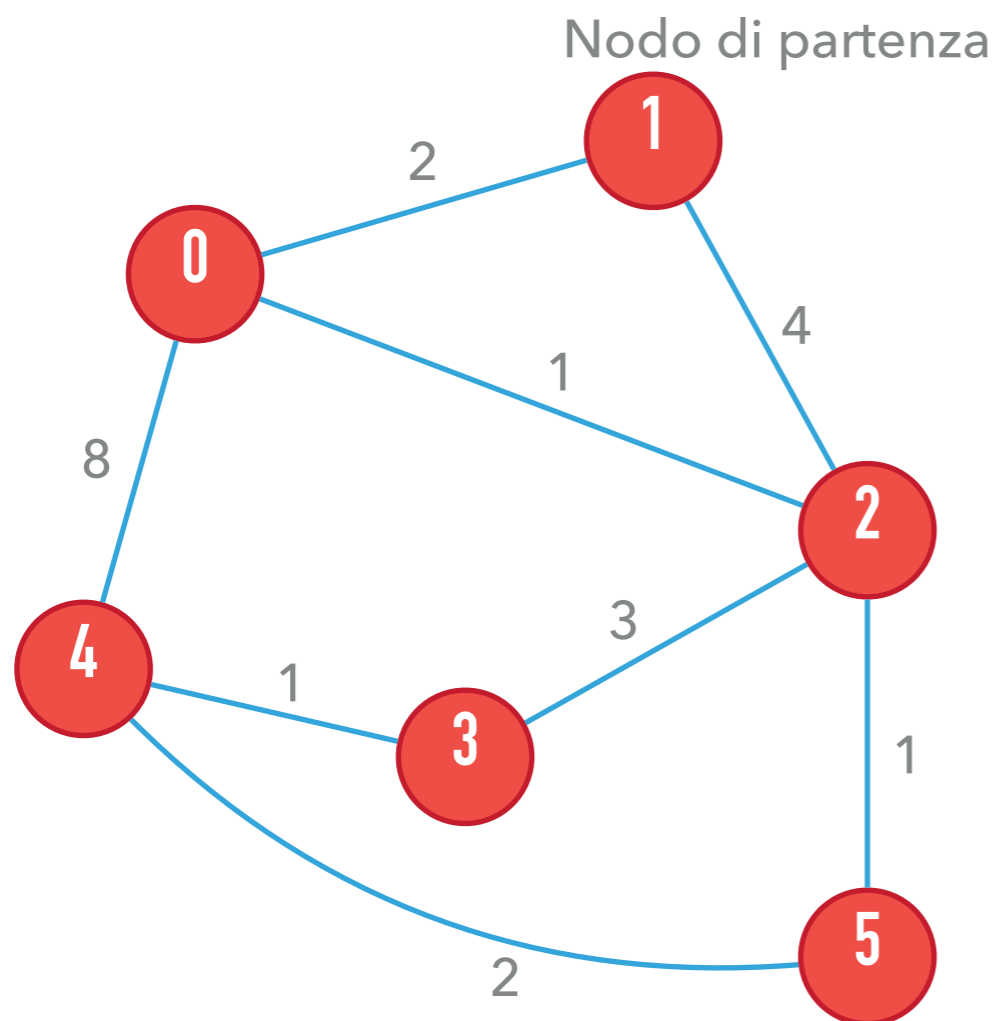
 for all v adiacenti a u # e aggiorniamo la distanza di tutti i vicini

 RELAX($u, v, w_{u,v}$)

ESEMPIO DI ESECUZIONE



ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

1

Lista dei nodi non visitati

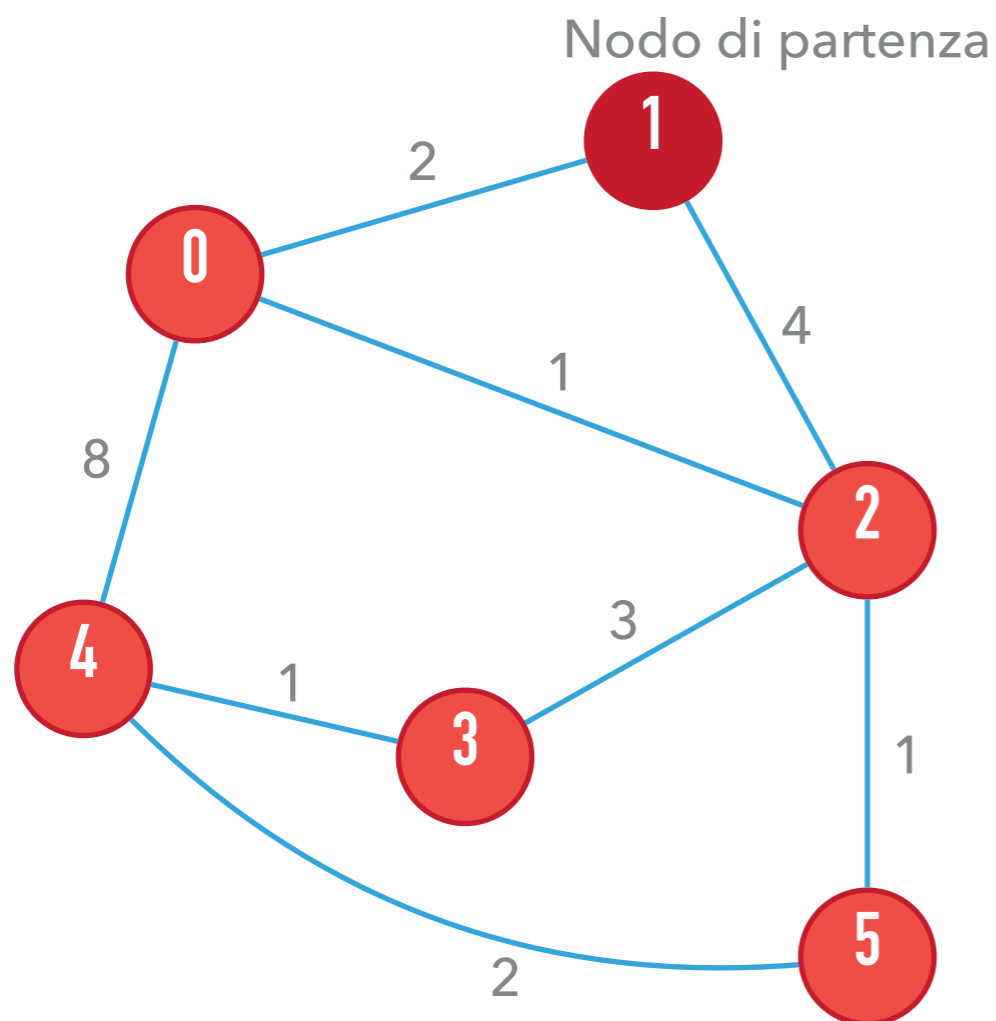
0

2

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0

∞

1

0

2

∞

3

∞

4

∞

5

∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

1

Lista dei nodi non visitati

0

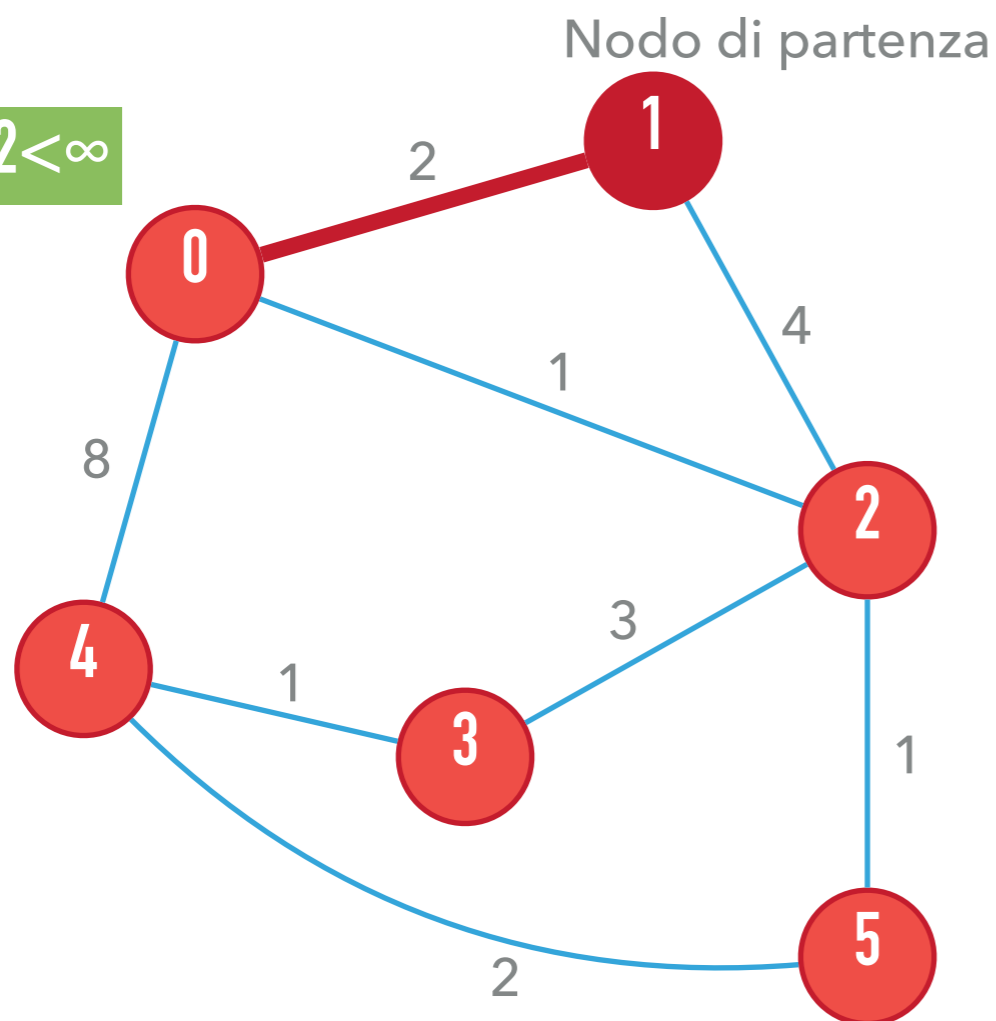
2

3

4

5

$$0+2 < \infty$$



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	∞
---	----------

3	∞
---	----------

4	∞
---	----------

5	∞
---	----------

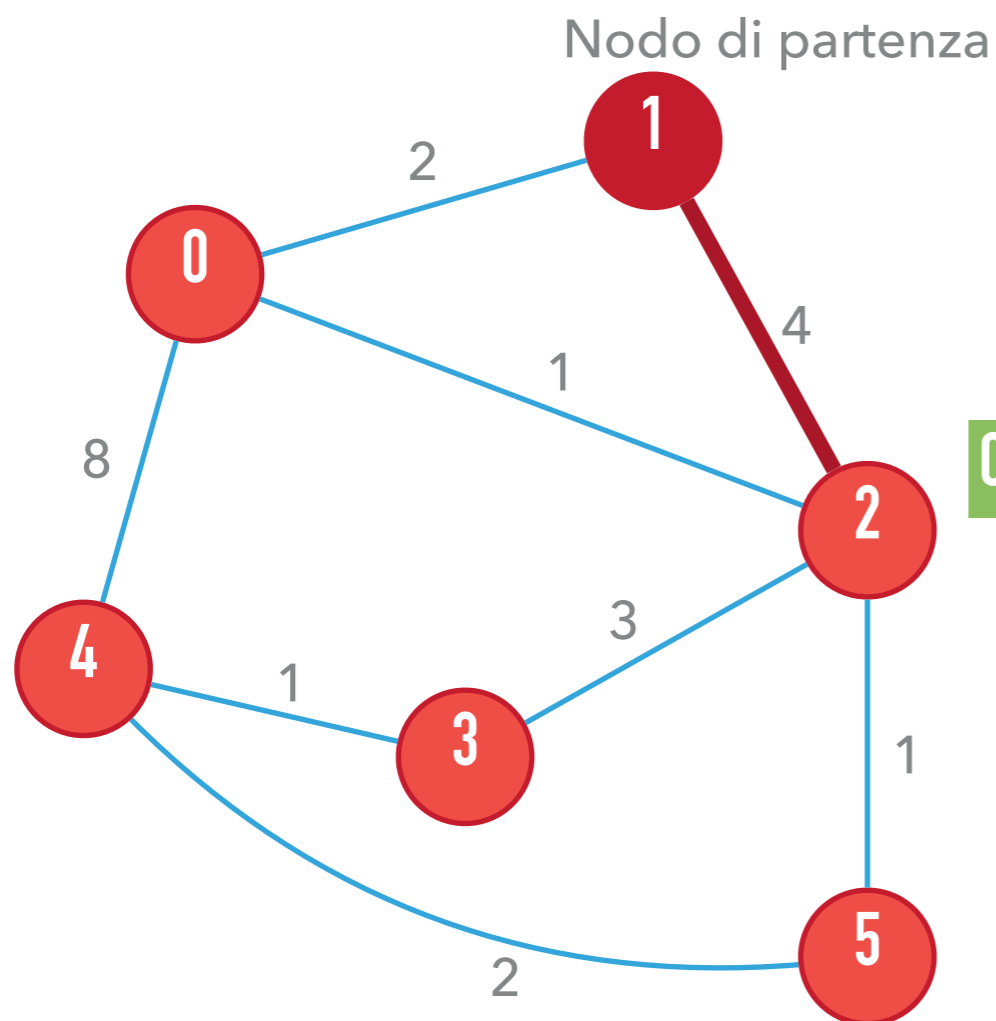
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

1

Lista dei nodi non visitati

0 2 3 4 5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

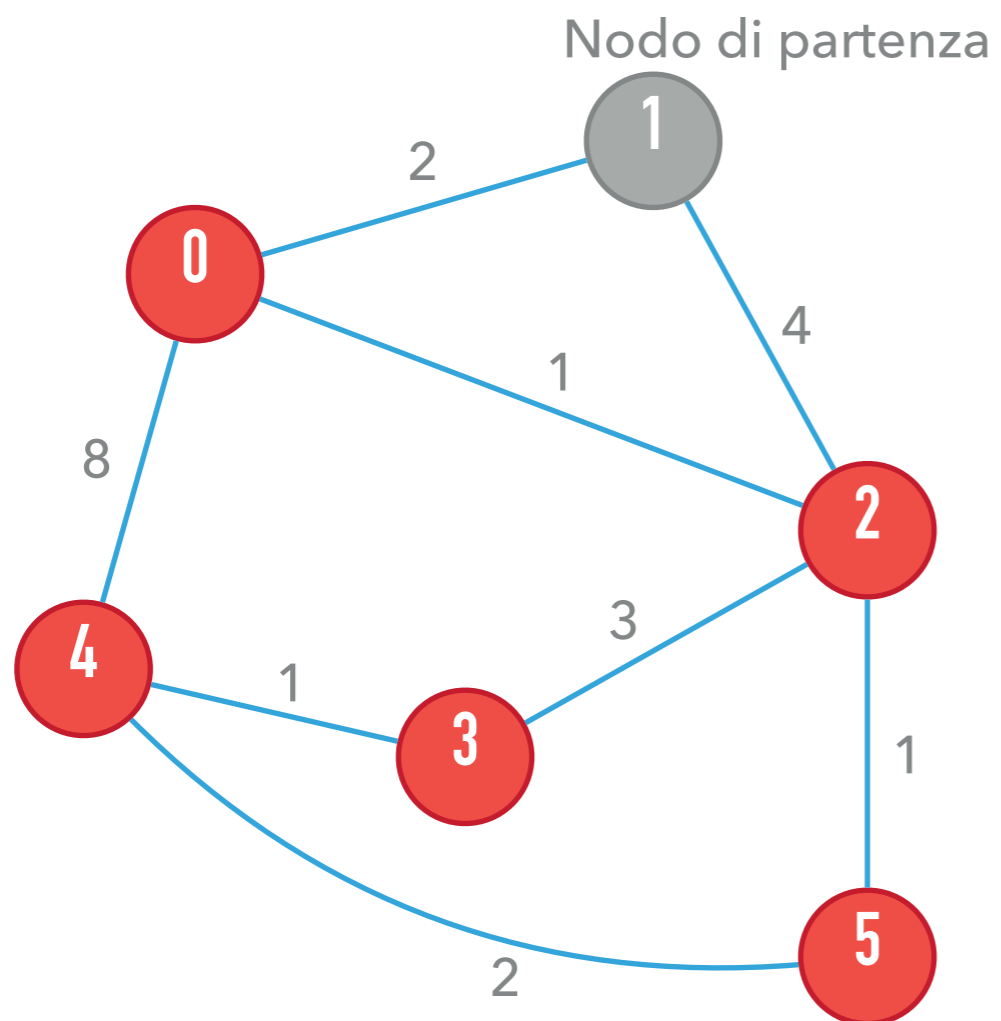
2	4
---	---

3	∞
---	---

4	∞
---	---

5	∞
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	4
3	∞
4	∞
5	∞

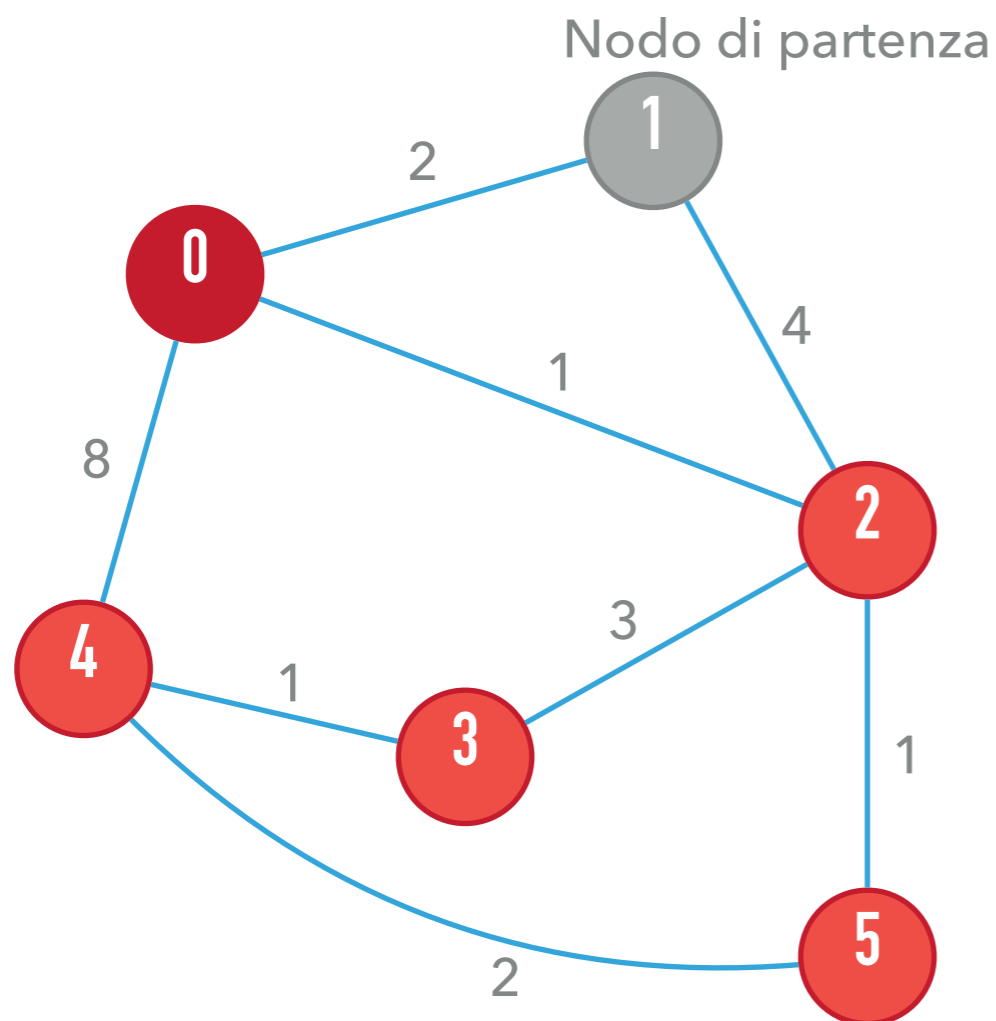
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

0

Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	4
---	---

3	∞
---	----------

4	∞
---	----------

5	∞
---	----------

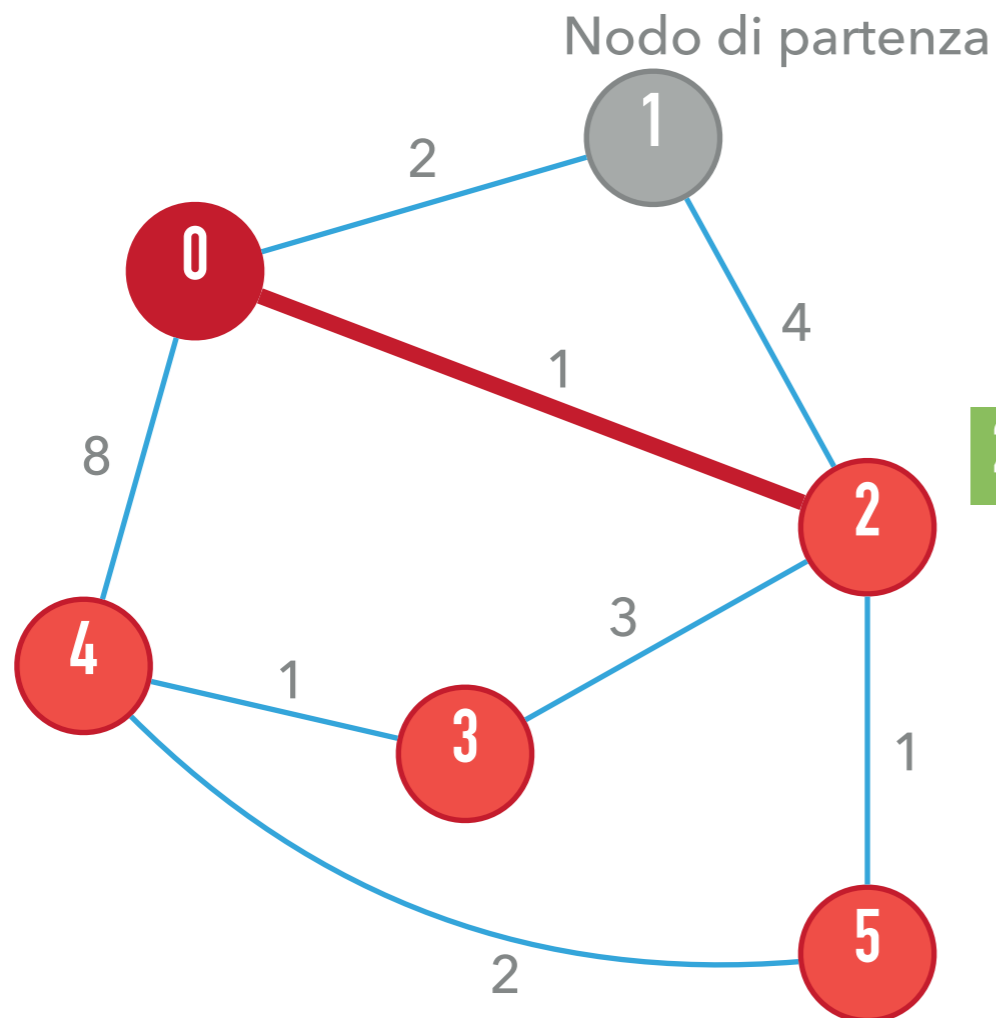
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

0

Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	∞
---	----------

4	∞
---	----------

5	∞
---	----------

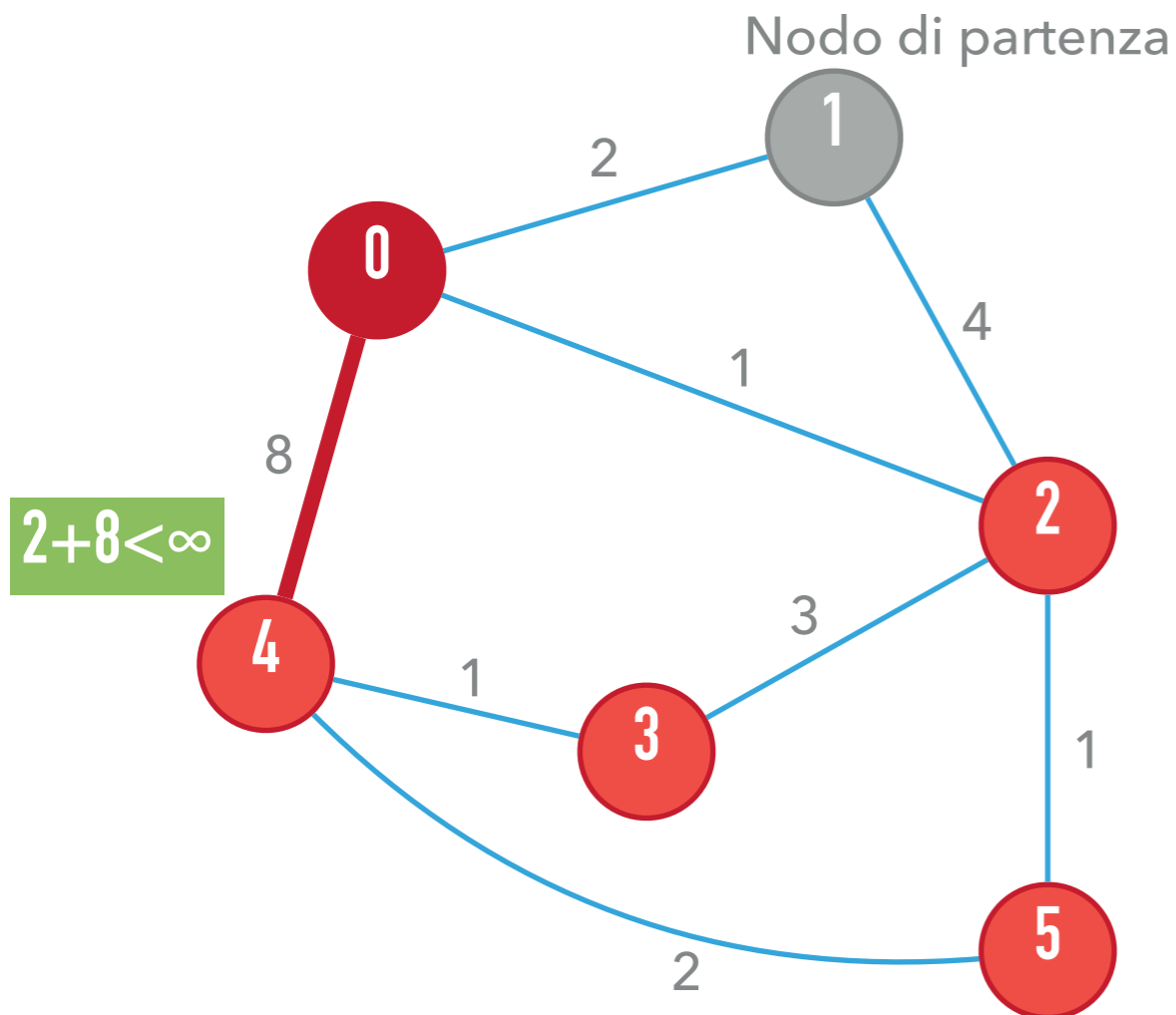
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

0

Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

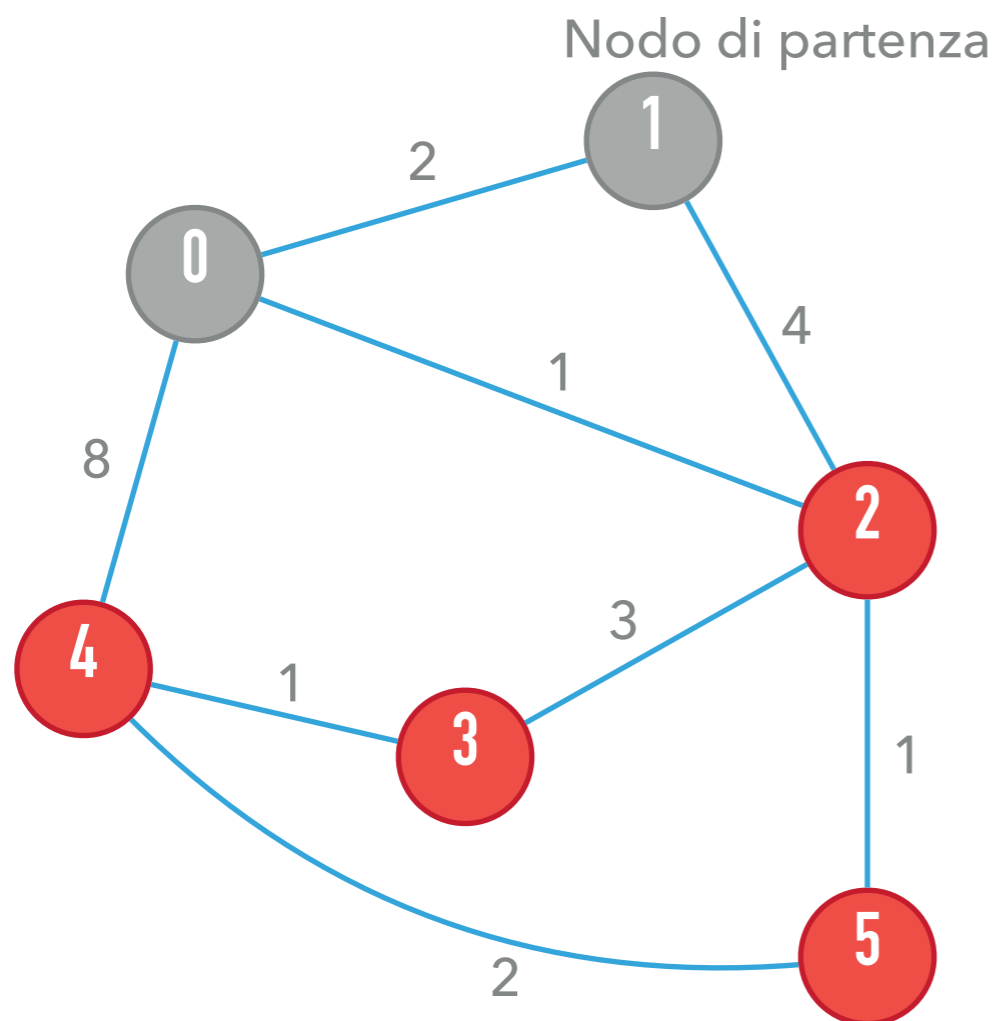
2	3
---	---

3	∞
---	---

4	10
---	----

5	∞
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	∞
4	10
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

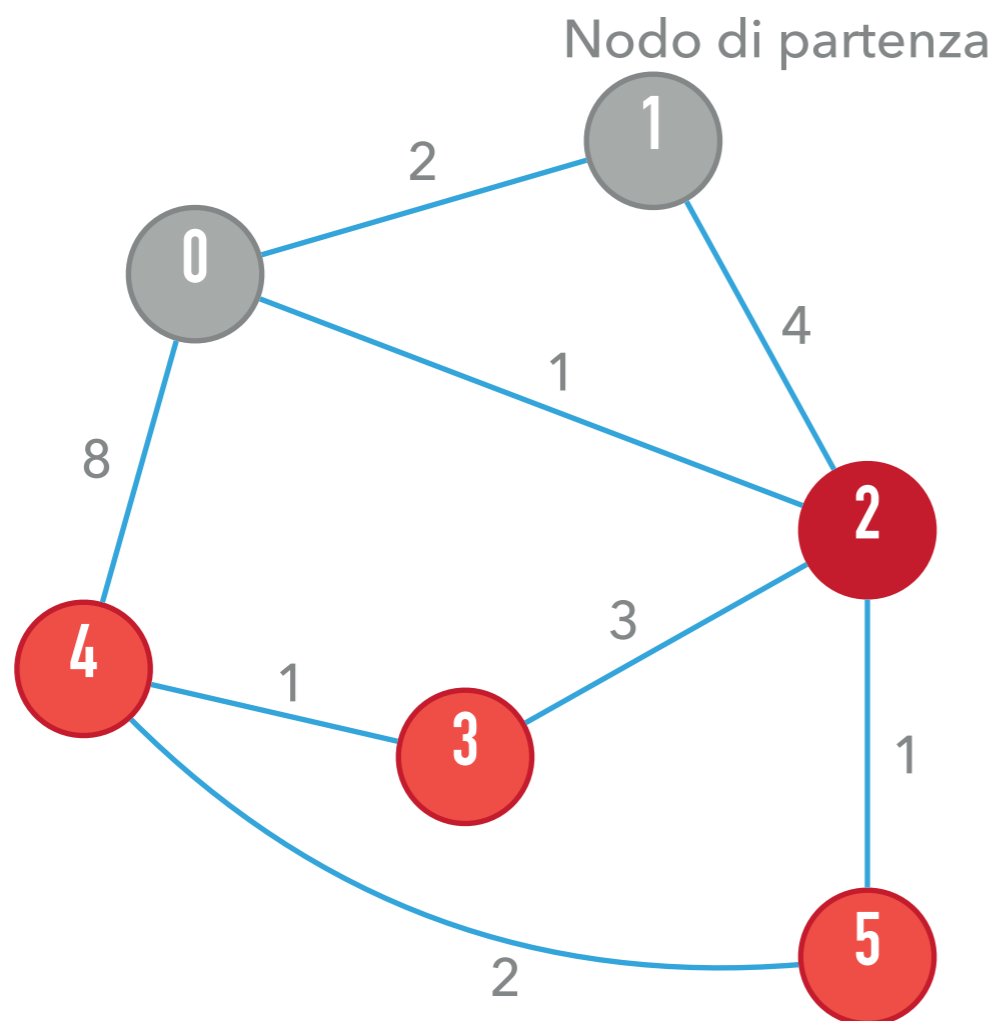
2

Lista dei nodi non visitati

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	∞
---	----------

4	10
---	----

5	∞
---	----------

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

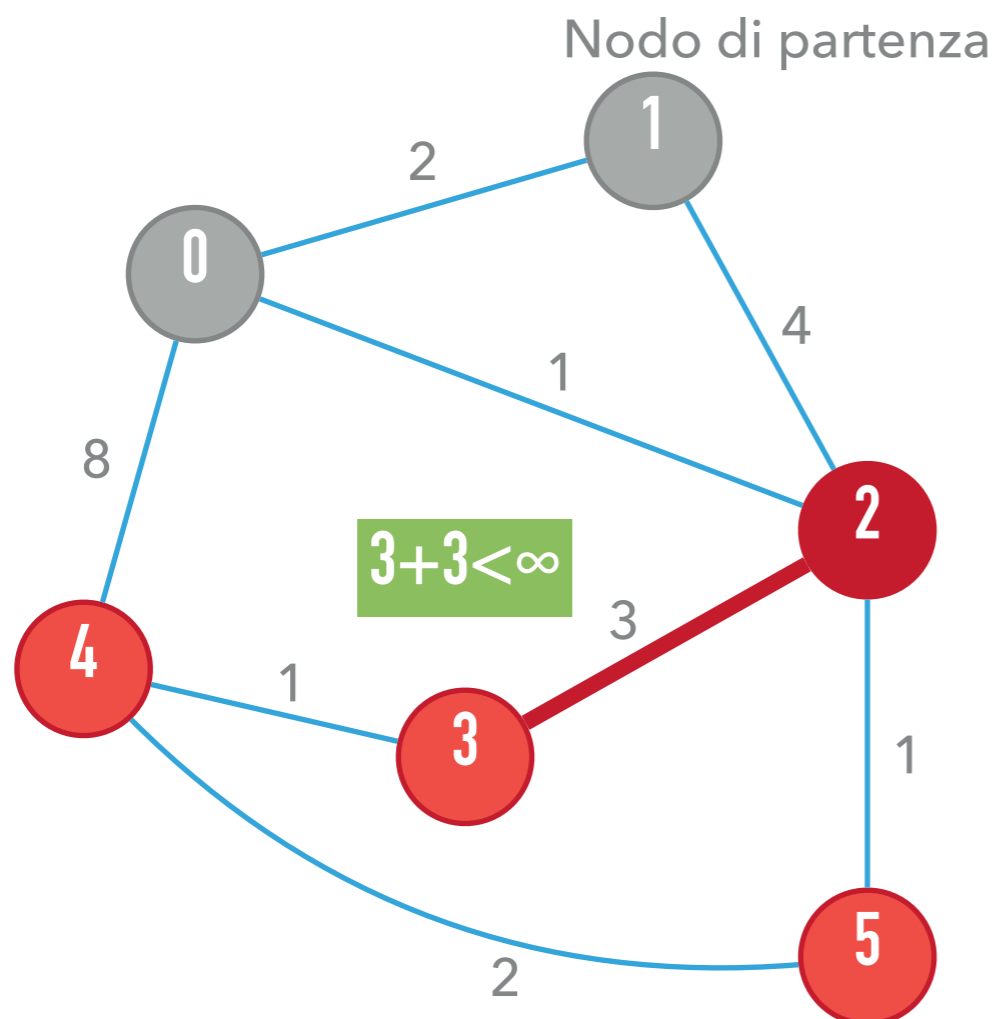
2

Lista dei nodi non visitati

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	6
---	---

4	10
---	----

5	∞
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

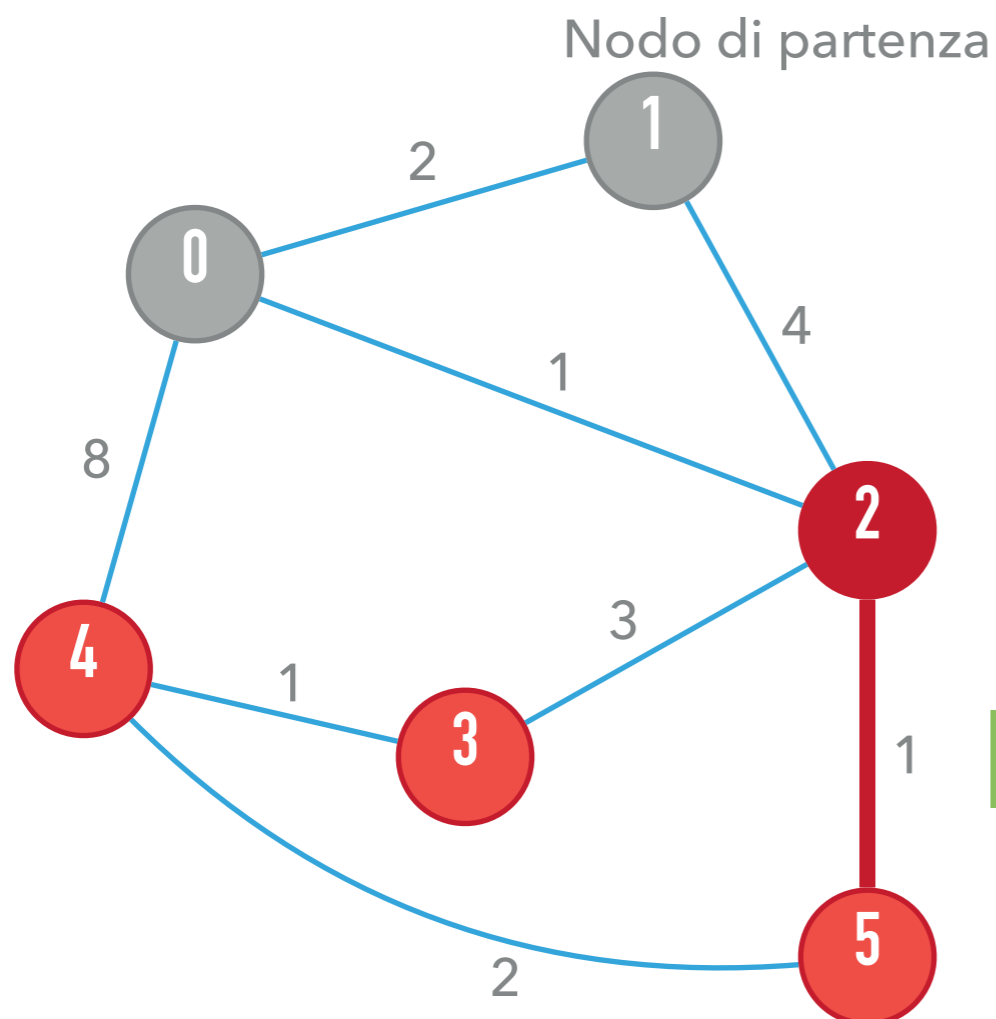
2

Lista dei nodi non visitati

3

4

5



$$3+1 < \infty$$

Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

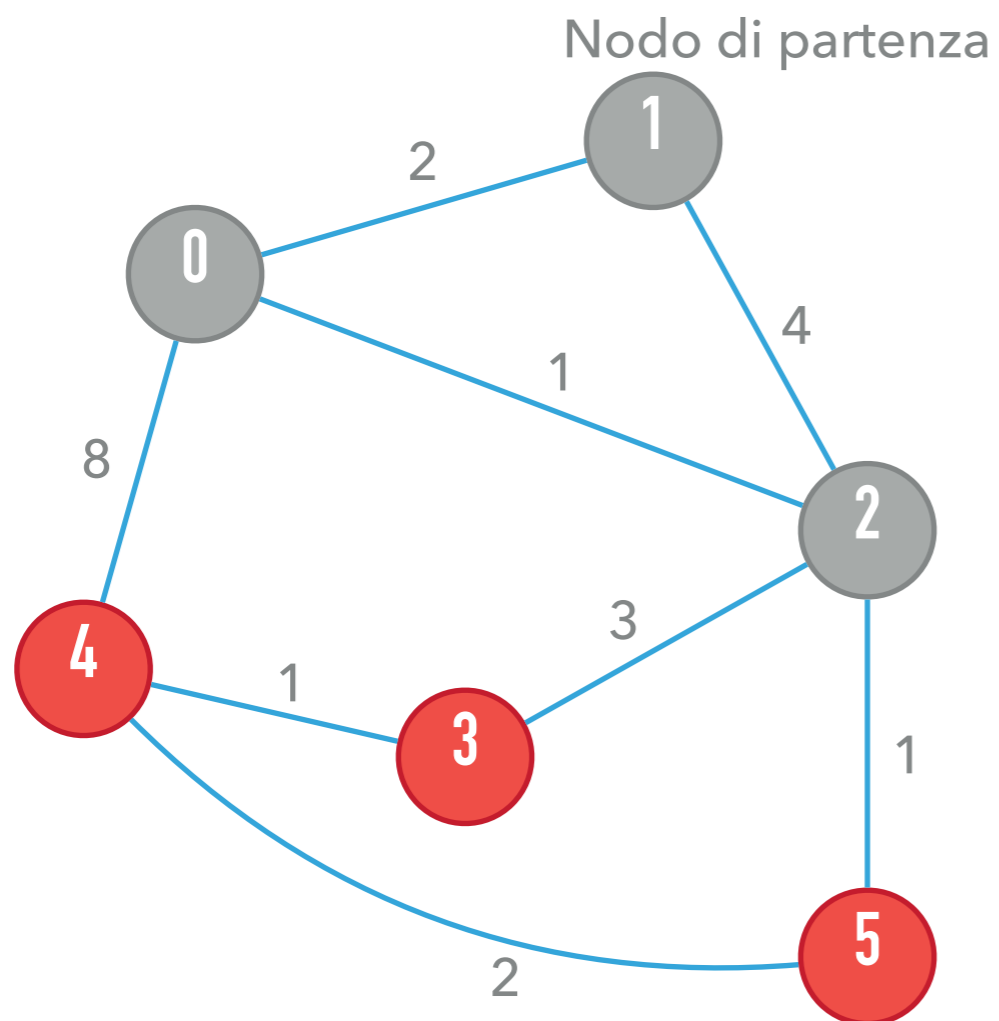
2	3
---	---

3	6
---	---

4	10
---	----

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	10
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

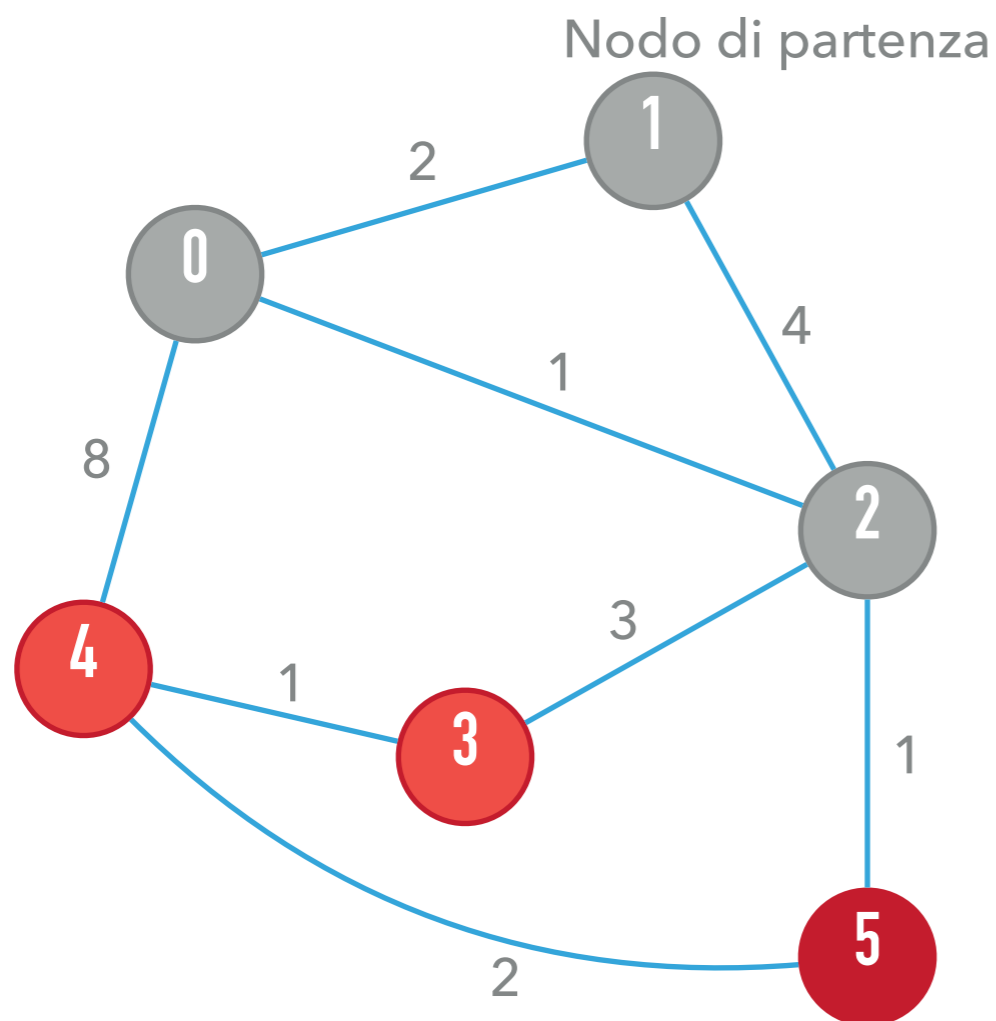
Nodo con distanza minima:

5

Lista dei nodi non visitati

3

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	6
---	---

4	10
---	----

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE

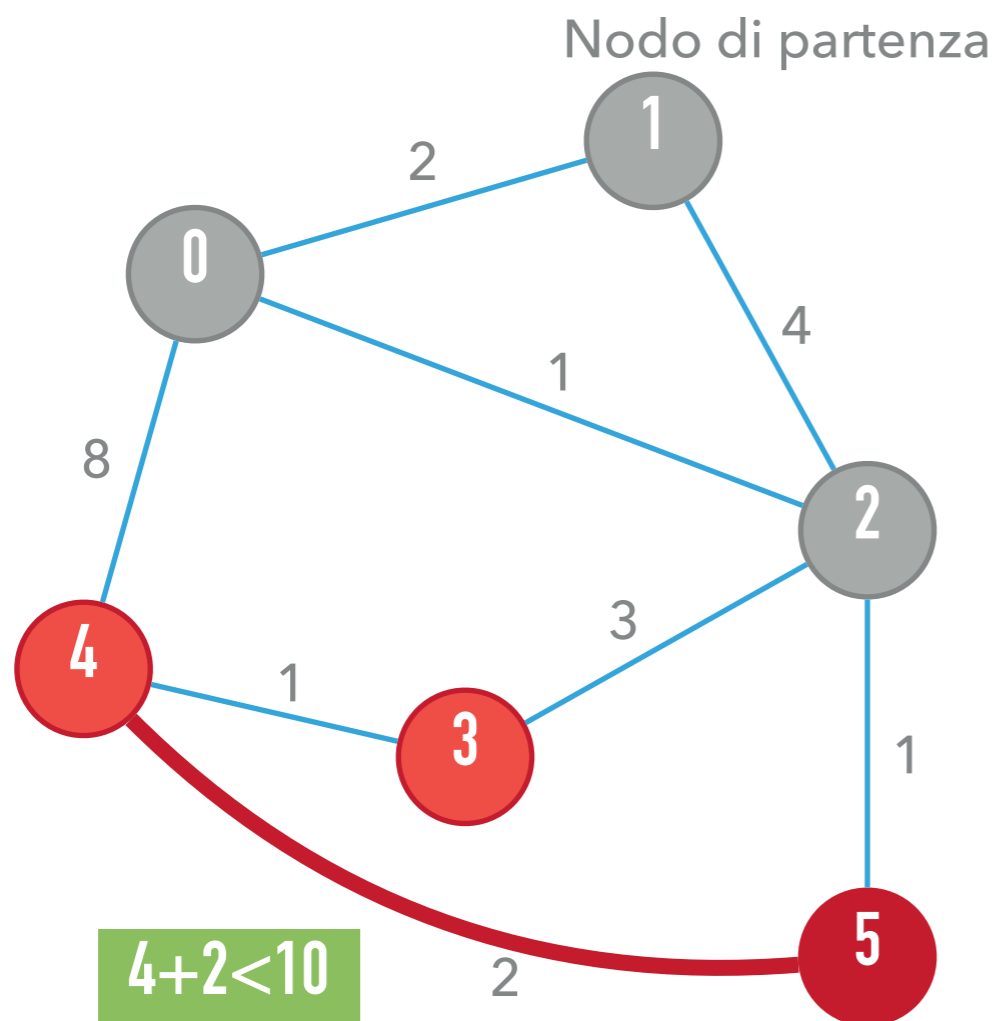
Nodo con distanza minima:

5

Lista dei nodi non visitati

3

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

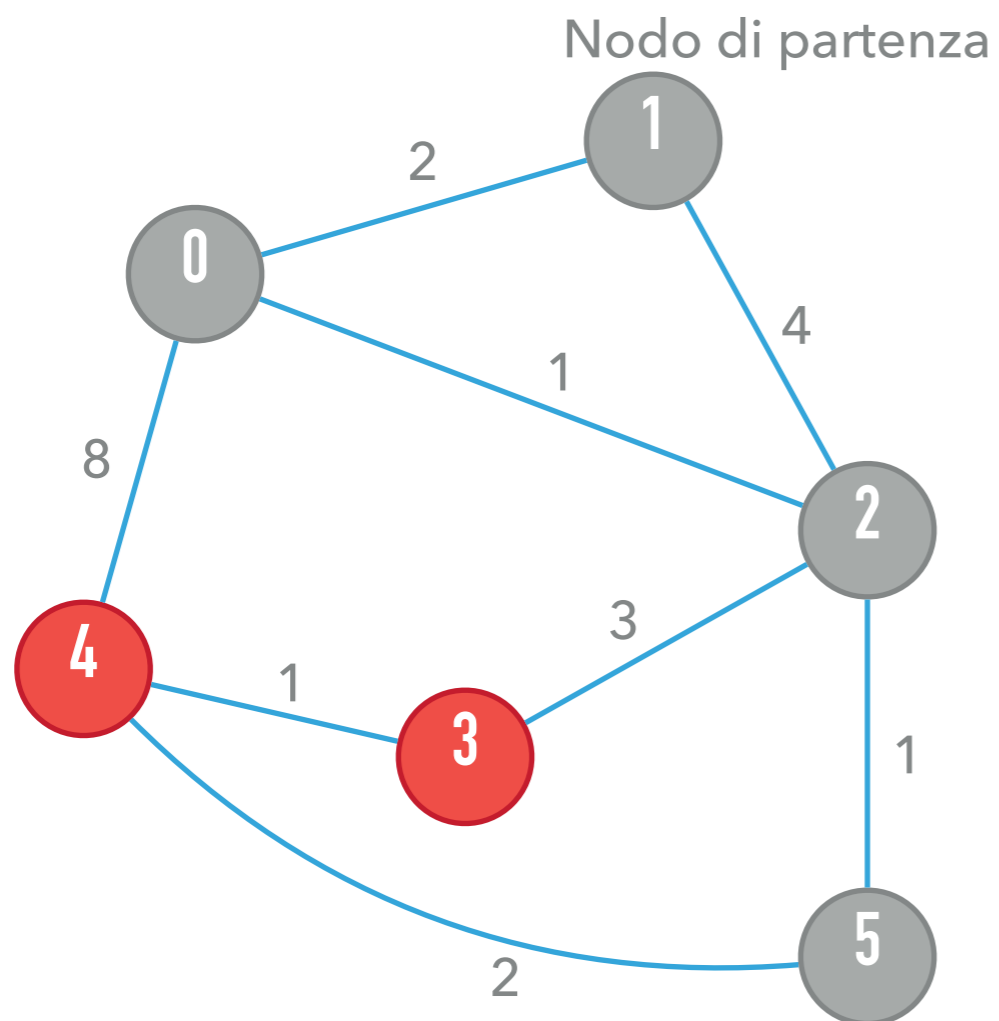
2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

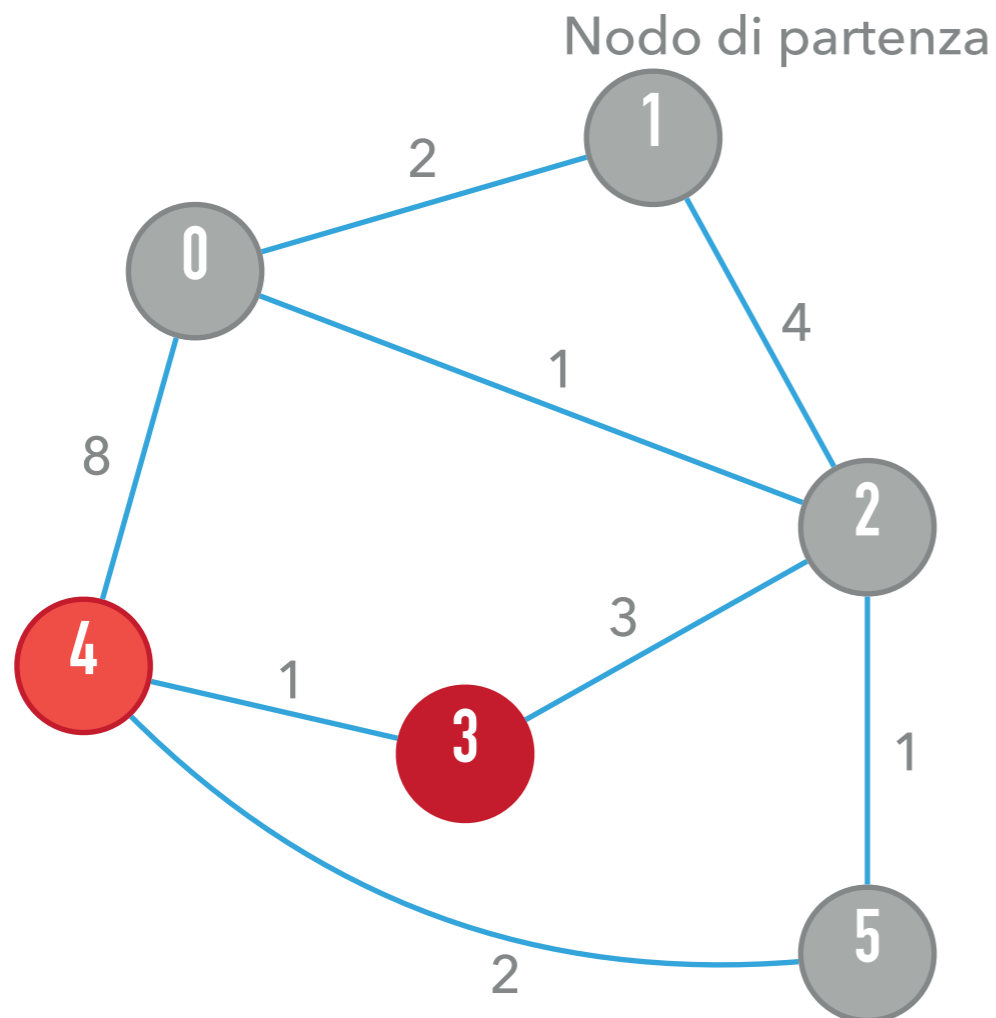
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

3

Lista dei nodi non visitati

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

5	4
---	---

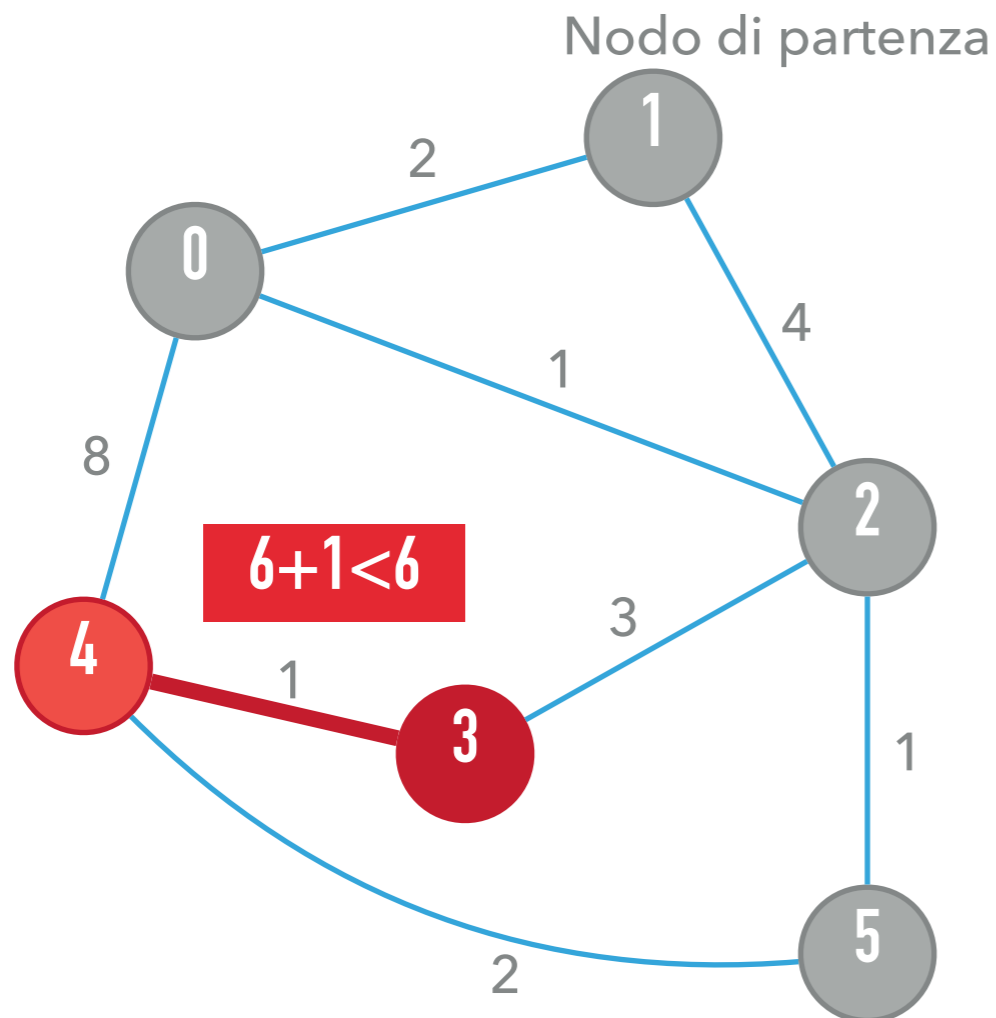
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

3

Lista dei nodi non visitati

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

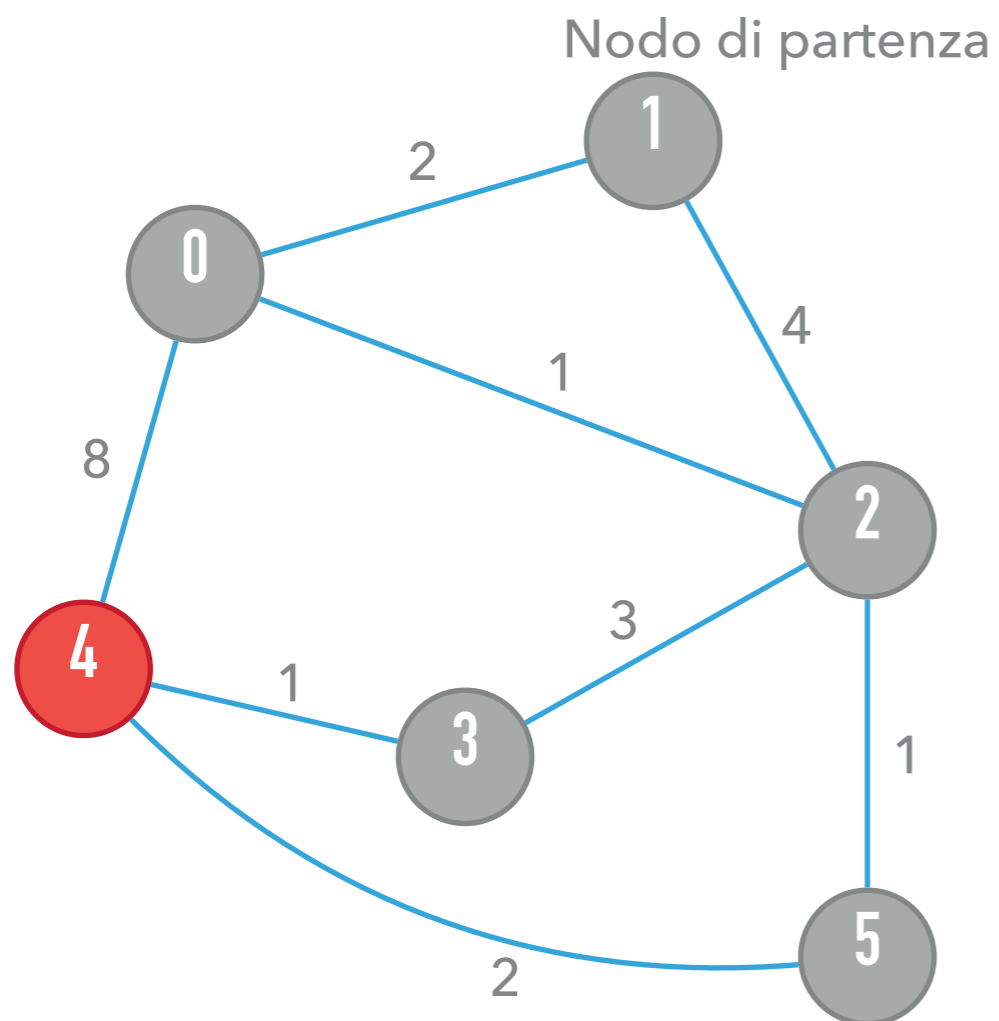
2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

4

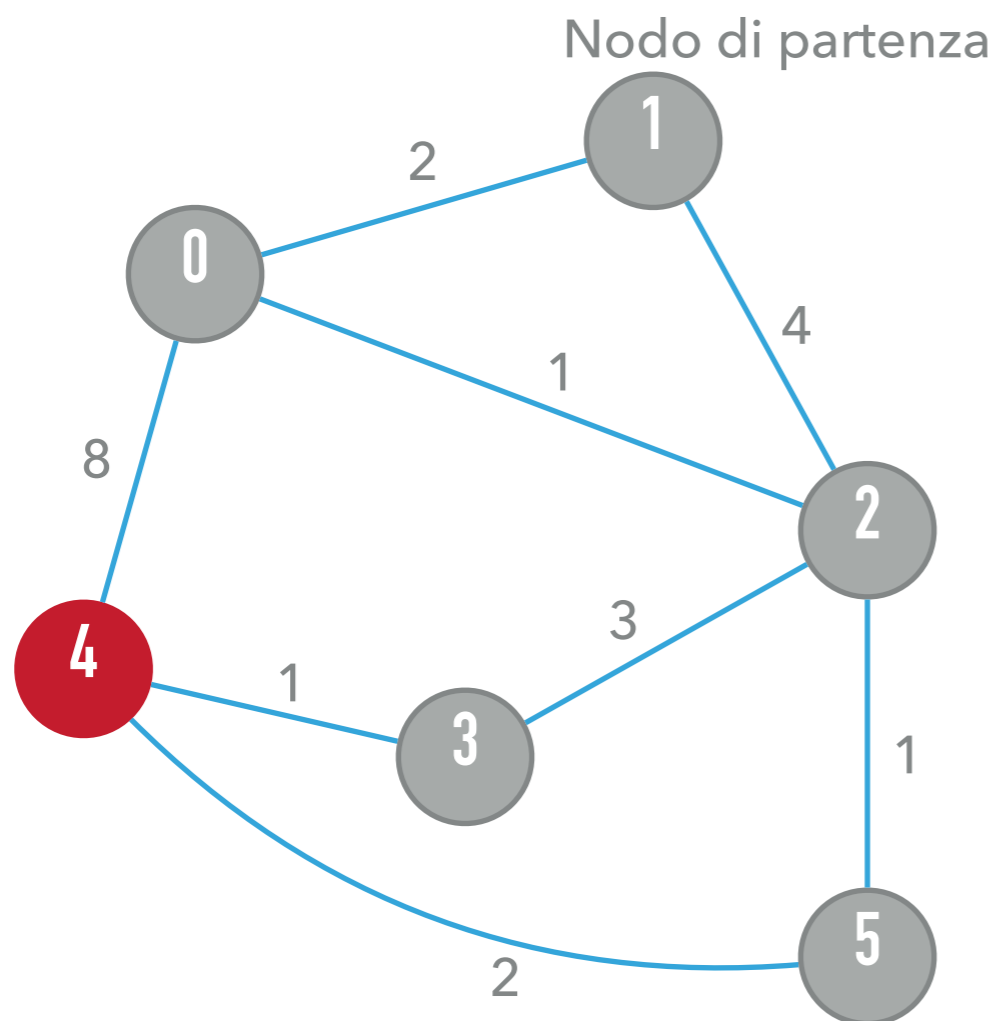
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

4

Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

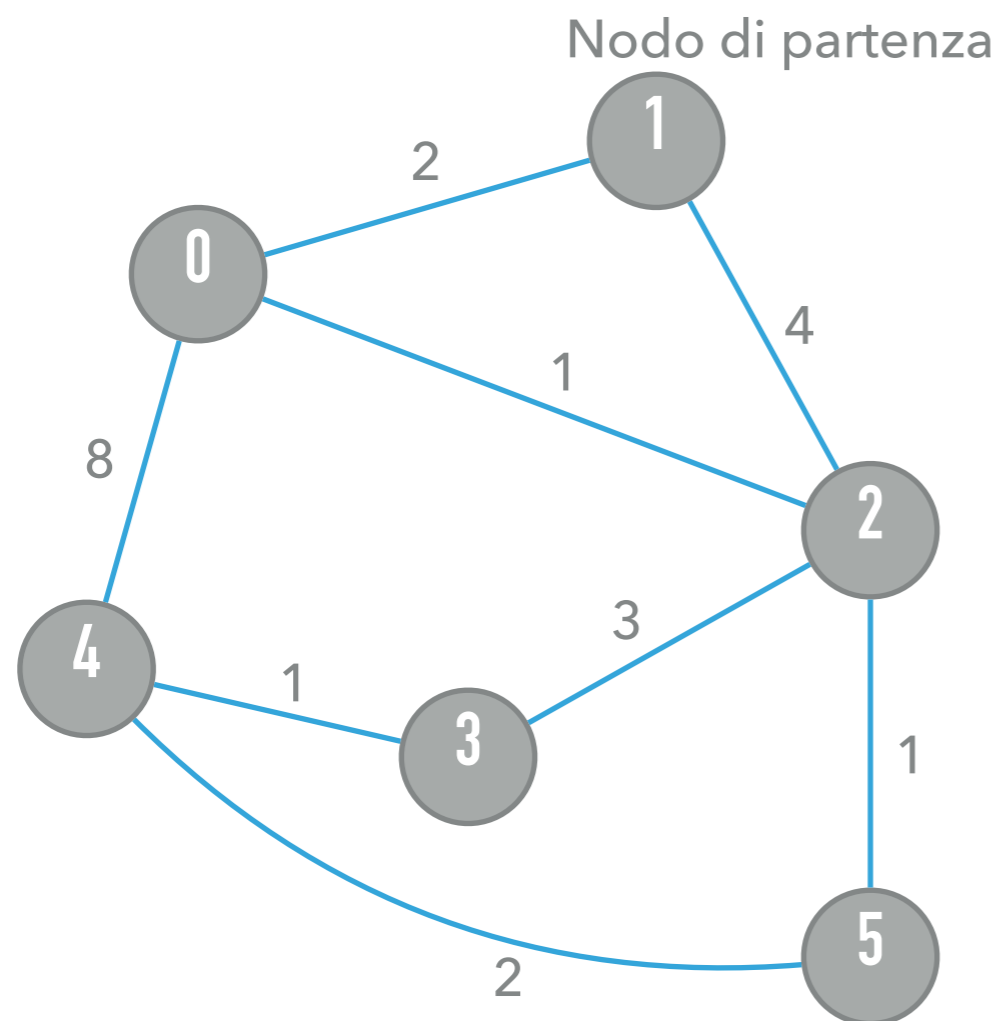
2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

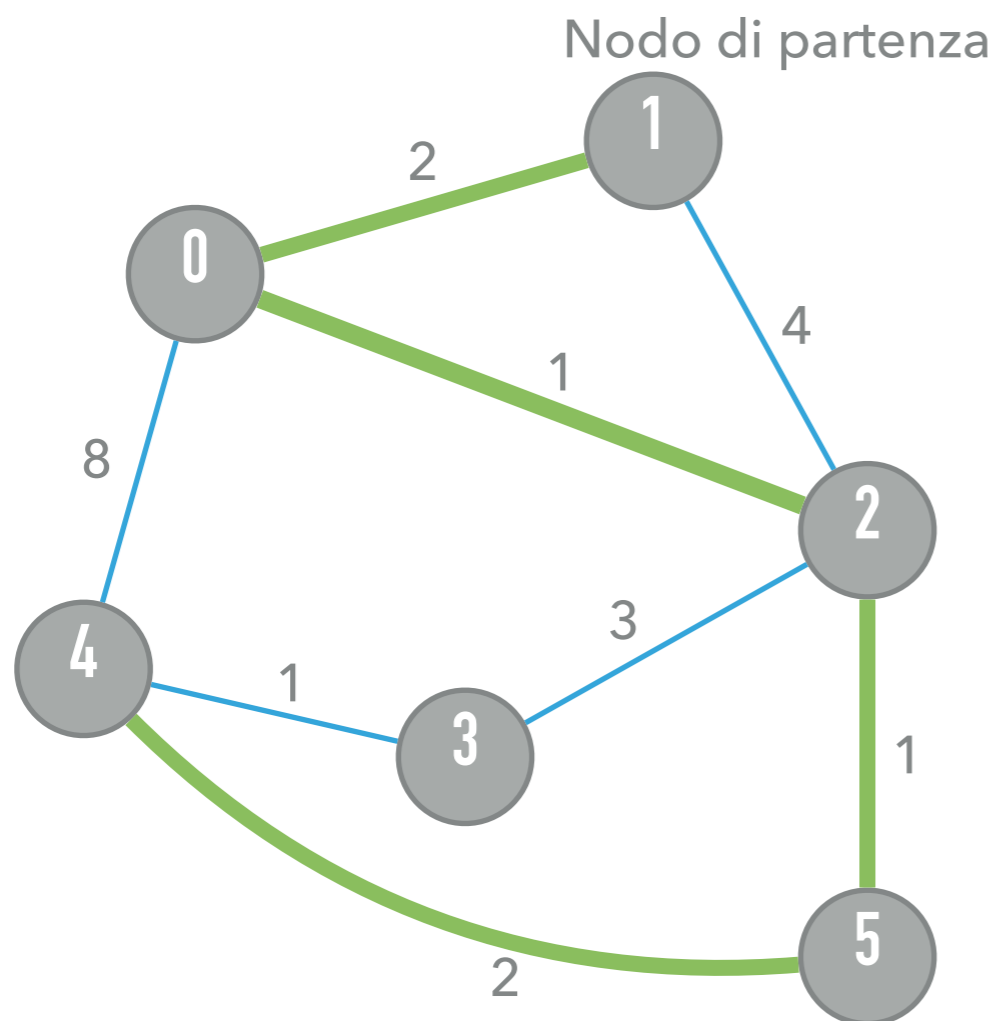
5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

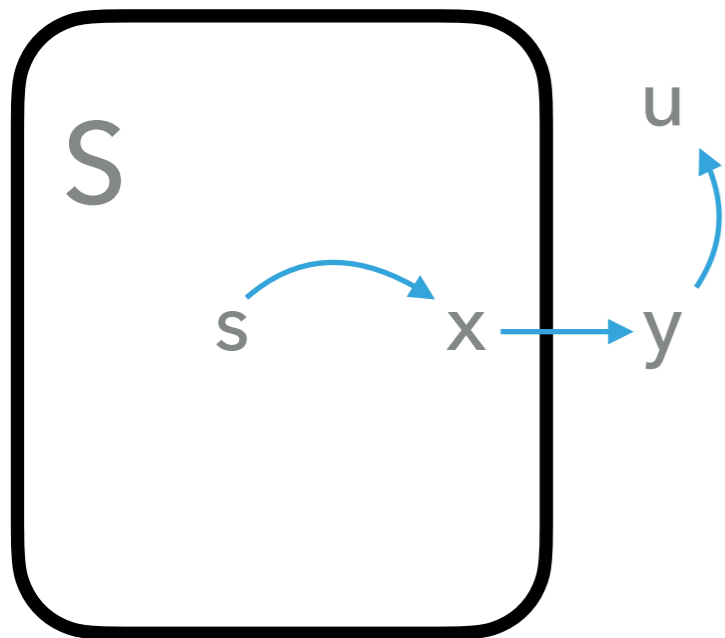


Percorso di lunghezza minima
per andare dal nodo (1) al nodo (4)

Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

CORRETTEZZA DI DIJKSTRA

- ▶ Alla fine di Dijkstra, $\text{distanza}[v] = d[v] = \delta(s, v)$, $\forall v \in V$
- ▶ Teorema: all'inserimento di u in S , $\forall u$, vale $d[u] = \delta(s, u)$.
- ▶ Per assurdo, sia u il primo vertice inserito in S che viola questa proprietà, e y il primo vertice su un cammino minimo da s a u non ancora in S all'inserimento di u .



- ▶ Quindi $y \in Q$ e $d[y] \geq d[u]$
- ▶ $x \in S \Rightarrow d[x] = \delta(s, x)$, per scelta di u
- ▶ Il cammino $s \rightarrow y \rightarrow x$ è minimo, ergo $d[y] = \delta(s, x) + w_{x,y} = \delta(s, y)$, perchè x è stato rilassato e valeva $d[x] = \delta(s, x)$ in tal momento.
- ▶ Da $d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$ e $d[u] \leq d[y]$ segue $d[u] = \delta(s, u)$, assurdo.

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- ▶ Visitiamo ogni nodo al più una volta: quando lo estraiamo dalla lista
- ▶ Visitiamo ogni arco al più una volta: la prima volta che incontriamo una delle sue estremità
- ▶ Il tempo di calcolo quindi dipende da questi due valori e dalle operazioni di:

- ▶ Trovare il minimo tra i nodi non visitati
- ▶ Aggiornare la distanza dei nodi

Dipendono da come rappresentiamo il grafo e le altre strutture che ci servono

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- ▶ Se usiamo un array per mantenere le distanze di ogni nodo:
 - ▶ Ogni aggiornamento di distanza richiede $O(1)$, dato che è sufficiente cambiare il valore
 - ▶ Trovare il minimo richiede tempo $O(V)$ perché l'array va scandito
 - ▶ Otteniamo quindi tempo $O(V^2 + E) = O(V^2)$ perché per ogni nodo dobbiamo estrarre il minimo e per ogni arco aggiornare un peso

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- ▶ Se abbiamo $E = o(V^2/\log V)$ possiamo usare un min-heap, (abbiamo usato un sistema simile nell'algoritmo di heapsort)
- ▶ Nel caso di min-heap:
 - ▶ Rimozione del minimo: $O(\log V)$
 - ▶ Aggiornamento del peso: $O(\log V)$
 - ▶ Otteniamo quindi $O(V \log V + E \log V) = O((V + E)\log V)$ che è meglio dell'implementazione come array quando abbiamo $o(V^2/\log V)$ archi