

PROGRAMMAZIONE DINAMICA
Distanza di Levenshtein
Algoritmo di Floyd-Warshall

ALGORITMI E STRUTTURE DATI

DISTANZA DI LEVENSHTTEIN

- ▶ La distanza di Levenshtein serve a quantificare quanto due stringhe siano diverse
- ▶ Abbiamo due sequenze $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ e ci chiediamo quale sia il numero minimo di operazioni di **inserimento**, **rimozione** e **sostituzione** necessarie per trasformare X in Y .
- ▶ Utile, per esempio, per trovare la correzione automatica (i.e., quale è la parola più simile a quella che abbiamo digitato?)

DISTANZA DI LEVENSHTein: OPERAZIONI

- ▶ Inserimento di un carattere z in posizione i nella sequenza $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$: otteniamo $X' = \langle x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_i, \dots, x_m \rangle$
- ▶ Inserimento di "S" in posizione 3 di "CASA": "CASSA"
- ▶ Cancellazione del carattere in posizione i nella sequenza $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$: otteniamo $X' = \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m \rangle$
- ▶ Cancellazione del carattere in posizione 1 di "CASA": "ASA"

DISTANZA DI LEVENSHTEIN: OPERAZIONI

- ▶ Sostituzione del carattere in posizione i con il carattere z nella sequenza $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$: otteniamo $X' = \langle x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_m \rangle$
- ▶ Sostituzione del carattere in posizione 4 con "E" in "CASA": "CASE"

DISTANZA DI LEVENSHTein

- ▶ Come possiamo approcciare il problema di trovare il minimo numero di operazioni?
- ▶ Ci riconduciamo a sotto-problemi più piccoli
- ▶ E vediamo come comporre le soluzioni ottime di problemi più piccoli in modo da formare la soluzione
- ▶ Iniziamo cercando dei casi base

DISTANZA DI LEVENSHTein: CASI BASE

- ▶ Se $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle \rangle$ allora dobbiamo cancellare tutti i caratteri di X per ottenere Y : servono m operazioni
- ▶ Se $X = \langle \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ dobbiamo inserire in X tutti i caratteri di Y : servono n operazioni
- ▶ Quindi se una delle due sequenze è vuota ci servono tante operazioni di inserimento o cancellazione quanto è la lunghezza dell'altra sequenza

DISTANZA DI LEVENSHTEIN: SOTTO-STRUTTURA OTTIMA (1)

- ▶ Se abbiamo le due sequenze $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, come possiamo agire guardando l'ultimo elemento?
- ▶ Possiamo sostituire x_m con y_n se $x_m \neq y_n$. Dopo questa operazione le due sequenze coincidono sull'ultimo elemento e dobbiamo trovare quante operazioni svolgere per trasformare $X' = \langle x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$ in $Y' = \langle y_1, \dots, y_{n-1} \rangle$

DISTANZA DI LEVENSHTein: SOTTO-STRUTTURA OTTIMA (2)

- ▶ Se abbiamo le due sequenze $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, come possiamo agire guardando l'ultimo elemento?
- ▶ Se $x_m = y_n$ non svolgiamo alcuna operazione e dobbiamo trovare quante operazioni svolgere per trasformare $X' = \langle x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$ in $Y' = \langle y_1, \dots, y_{n-1} \rangle$

DISTANZA DI LEVENSHTein: SOTTO-STRUTTURA OTTIMA (3)

- ▶ Se abbiamo le due sequenze $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, come possiamo agire guardando l'ultimo elemento?
- ▶ Possiamo decidere di inserire y_n come ultimo carattere di X e quindi chiederci il numero minimo di operazioni da svolgere per trasformare X in $Y' = \langle y_1, \dots, y_{n-1} \rangle$

DISTANZA DI LEVENSHTEIN: SOTTO-STRUTTURA OTTIMA (4)

- ▶ Se abbiamo le due sequenze $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, come possiamo agire guardando l'ultimo elemento?
- ▶ Possiamo decidere di cancellare l'ultimo carattere di X e quindi chiederci il numero minimo di operazioni da svolgere per trasformare $X' = \langle x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$ in Y

DISTANZA DI LEVENSHTein

- ▶ Abbiamo coperto tutti i possibili casi con cui possiamo applicare una qualche operazione per far coincidere le due stringhe sull'ultimo elemento
- ▶ Una volta fatto questo ci ritroviamo un problema già semplice da risolvere:
 - ▶ O entrambe le sequenze sono più corte di un carattere
 - ▶ O almeno una è più corta di un carattere
- ▶ Vediamo ora come calcolare il costo minimo

DISTANZA DI LEVENSHTein

- ▶ Indichiamo con $c_{i,j}$ il costo minimo per trasformare la sotto-sequenza $X' = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$ in $Y' = \langle y_1, \dots, y_j \rangle$
- ▶ Se $i = 0$ o $j = 0$ siamo in uno dei casi base:
 - ▶ $c_{i,0} = i$
 - ▶ $c_{0,j} = j$

DISTANZA DI LEVENSHTEIN

- ▶ Se $i \neq 0$ e $j \neq 0$ allora abbiamo che dobbiamo scegliere il costo minimo tra tutte le operazioni che possiamo effettuare:
 - ▶ $1 + c_{i-1,j-1}$ se effettuiamo una sostituzione e $x_i \neq y_j$
 - ▶ $c_{i-1,j-1}$ se effettuiamo una sostituzione e $x_i = y_j$
 - ▶ $1 + c_{i-1,j}$ se cancelliamo l'ultimo carattere di X'
 - ▶ $1 + c_{i,j-1}$ se inseriamo l'ultimo carattere di Y'

DISTANZA DI LEVENSHTTEIN

- ▶ Abbiamo quindi che

$$c_{i,j} = \begin{cases} \max(i, j) & \text{se } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ \min(1 + c_{i-1,j-1}, 1 + c_{i,j-1}, 1 + c_{i-1,j}) & \text{se } i, j \neq 0 \text{ e } x_i \neq y_j \\ \min(c_{i-1,j-1}, 1 + c_{i,j-1}, 1 + c_{i-1,j}) & \text{se } i, j \neq 0 \text{ e } x_i = y_j \end{cases}$$

- ▶ Questo ci permette di creare una tabella di $m + 1$ righe e $n + 1$ colonne che riempiamo coi valori di $c_{i,j}$

PSEUDOCODICE: DISTANZA DI LEVENSHTTEIN

Parametri: sequenze X e Y di lunghezza m e n

c = matrice $(m+1) \times (n+1)$ # la matrice che conterrà tutti i $c_{i,j}$

for i in range(0, m+1): # primo caso base, la sequenza Y è vuota

 c[i][0] = i

for j in range(0, n+1): # secondo caso base, la sequenza X è vuota

 c[0][j] = j

for i in range(1, m+1):

 for j in range(1, n+1):

 cancellazione = 1 + c[i-1][j]

 inserimento = 1 + c[i][j-1]

 sostituzione = c[i-1][j-1]

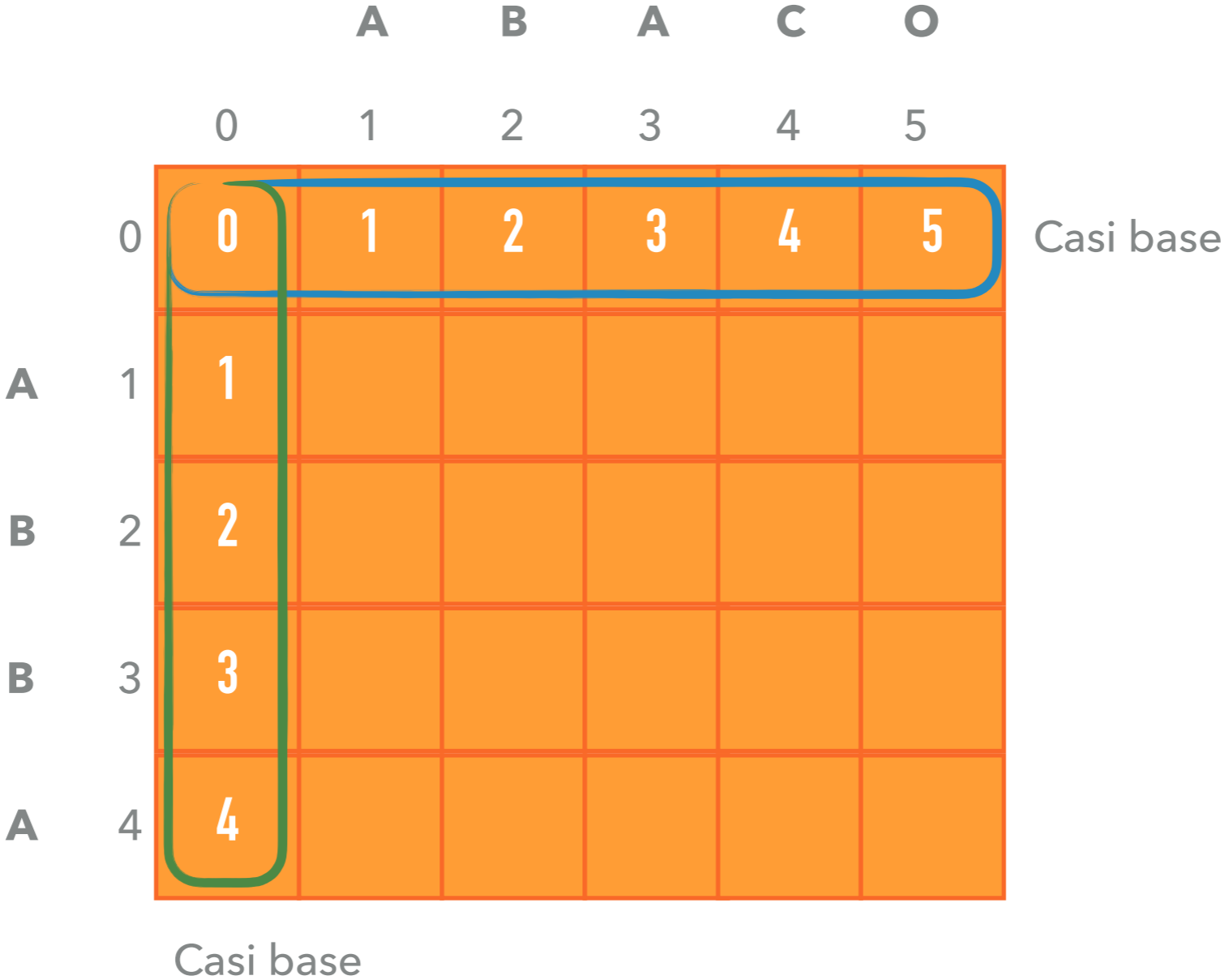
 if X[i] ≠ Y[j]: # la sostituzione è effettuata solo se x_i non coincide con y_j

 sostituzione = sostituzione + 1

 c[i][j] = min(sostituzione, inserimento, cancellazione)

return c[m][n]

DISTANZA DI LEVENSHTTEIN



DISTANZA DI LEVENSHTTEIN

		A	B	A	C	O
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
A	1	0				
B	2					
B	3					
A	4					

Dobbiamo fare il minimo tra
 $1+C[0][1]$
 $1+C[1][0]$
 $C[0][0]$

Questo perché $x_1 = y_1$

DISTANZA DI LEVENSHTTEIN

		A	B	A	C	O
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
A	1	0	1			
B	2					
B	3					
A	4					

Dobbiamo fare il minimo tra

$$1+C[0][2]$$

$$1+C[1][1]$$

$$1+C[0][1]$$



Questo perché $x_1 \neq y_2$

DISTANZA DI LEVENSHTTEIN

		A	B	A	C	O
	0	1	2	3	4	5
A	1	0	1	2	3	4
B	2	1	0	1	2	3
B	3	2	1	1	2	3
A	4	3	2	1	2	3

Distanza di Levenshtein tra "ABBA" e "ABACO"

DISTANZA DI LEVENSHTTEIN: COMPLESSITÀ

- ▶ Dobbiamo calcolare tutti i valori contenuti in una tabella di dimensione $(m + 1) \times (n + 1)$, quindi $O(mn)$ valori
- ▶ Riempire ogni valore richiede solamente un numero costante di operazioni, quindi il costo totale è $O(mn)$

DISTANZA DI LEVENSHTTEIN: VARIANTI

- ▶ Sfruttando la stessa idea possiamo definire molteplici varianti dello stesso algoritmo
- ▶ Possiamo dare costi diversi a seconda dell'operazione, per esempio w_{del} , w_{ins} e w_{sub} per cancellazione, inserimento e sostituzione. In quel caso è sufficiente cambiare lievemente la definizione di $c_{i,j}$:

$$c_{i,j} = \begin{cases} \max(w_{\text{del}}i, w_{\text{ins}}j) & \text{se } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ \min(w_{\text{sub}} + c_{i-1,j-1}, w_{\text{ins}} + c_{i,j-1}, w_{\text{del}} + c_{i-1,j}) & \text{se } i, j \neq 0 \text{ e } x_i \neq y_j \\ \min(c_{i-1,j-1}, w_{\text{ins}} + c_{i,j-1}, w_{\text{del}} + c_{i-1,j}) & \text{se } i, j \neq 0 \text{ e } x_i = y_j \end{cases}$$

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL

- ▶ L'algoritmo di Floyd-Warshall è un algoritmo per trovare il percorso più corto tra ogni coppia di nodi in un grafo
- ▶ Ovvero, dato un grafo $G = (V, E)$ avremo come risultato una tabella D in cui in posizione (i, j) è la lunghezza del percorso di peso/costo minimo tra i e j .
- ▶ Il grafo può essere orientato, pesato e anche con pesi negativi sugli archi

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL

- ▶ Supponiamo che i nodi corrispondano agli interi $\{0, \dots, k\}$
- ▶ Proviamo a definire in modo ricorsivo il percorso tra due nodi i e j
- ▶ Per fare questo consideriamo una restrizione sui nodi intermedi che possono essere contenuti nel percorso tra i e j
- ▶ Indichiamo con $d_{i,j}^k$ la lunghezza del percorso più corto tra i e j che contenga nodi intermedi solo nodi in $\{0, \dots, k - 1\}$

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL

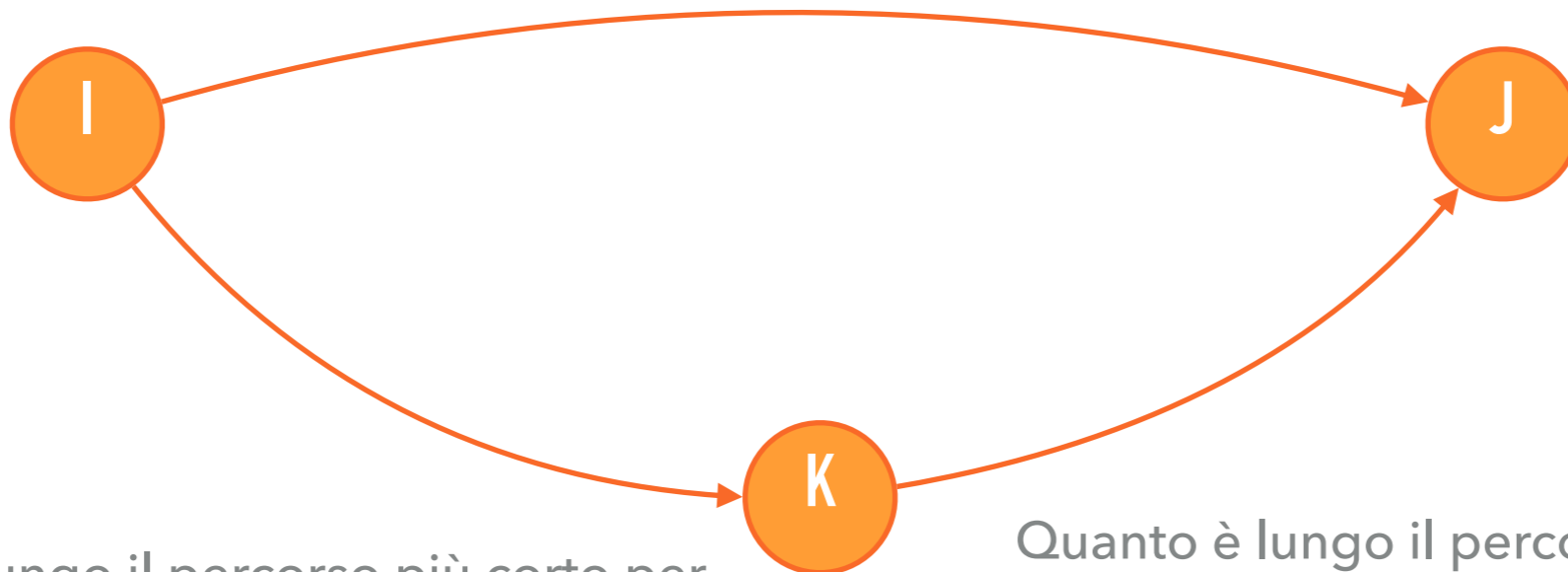
- ▶ Il caso base è quando non possiamo avere nodi intermedi, quindi $d_{i,j}^0$.
- ▶ Dato che non possiamo avere nodi intermedi ci sono solo tre possibilità:
 - ▶ $d_{i,i}^0 = 0$, dato che nodo di destinazione e partenza sono lo stesso
 - ▶ $d_{i,j}^0 = w_{i,j}$ se esiste un arco tra i e j
 - ▶ $d_{i,j}^0 = +\infty$ se nessun arco connette i con j

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL

- ▶ Per un generico $d_{i,j}^{k+1}$ abbiamo due casi:
 - ▶ Il nodo k non viene usato nel percorso di lunghezza minima per andare da i a j : in quel caso $d_{i,j}^{k+1} = d_{i,j}^k$
 - ▶ Il nodo k viene usato nel percorso di lunghezza minima per andare da i a j . Dato che un nodo può apparire una sola volta nel percorso non useremo k per andare da i a k e per andare da k a j , quindi $d_{i,j}^{k+1} = d_{i,k}^k + d_{k,j}^k$

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL

Quanto è lungo il percorso più corto per andare da i a j usando solo $\{0, \dots, k\}$ come nodi intermedi e senza passare per k ? $d_{i,j}^k$



Quanto è lungo il percorso più corto per andare da i a k usando solo $\{0, \dots, k\}$ come nodi intermedi? $d_{i,k}^k$

Quanto è lungo il percorso più corto per andare da k a j usando solo $\{0, \dots, k\}$ come nodi intermedi? $d_{k,j}^k$

Totale: $d_{i,k}^k + d_{k,j}^k$

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL

- ▶ Abbiamo quindi che $d_{i,j}^{k+1} = \min\{d_{i,j}^k, d_{i,k}^k + d_{k,j}^k\}$
dato che abbiamo solo due scelte possibili e vogliamo il percorso di lunghezza/peso minimo
- ▶ Possiamo iniziare da $k = 0$, in cui conosciamo tutti i valori, fino ad arrivare a $k = n$, in cui possiamo utilizzare tutti gli n vertici del grafo come nodi intermedi

PSEUDOCODICE: FLOYD-WARSHALL

Parametri: Matrice di adiacenza del grafo W di n nodi con $+\infty$ dove gli archi sono assenti

D = array di dimensione $(n+1) \times n \times n$ # contiene tutti i $d_{i,j}^k$

$D[0] = W$ # la matrice W contiene già i casi base

for k in range(0, n):

 # calcoliamo $d_{i,j}^{k+1}$ al variare di i e j

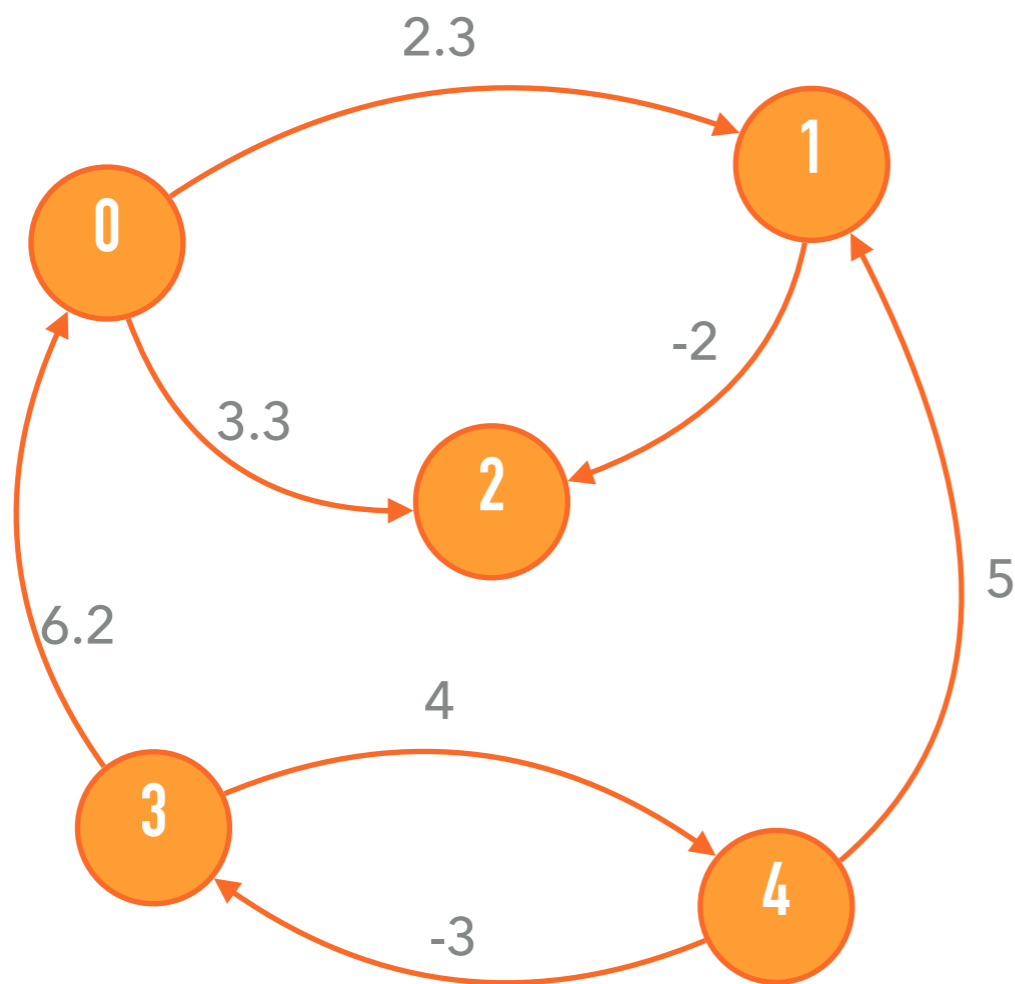
 for i in range(0, n):

 for j in range(0, n):

$D[k+1][i][j] = \min(D[k][i][j], D[k][i][k] + D[k][k][j])$

return $D[n]$

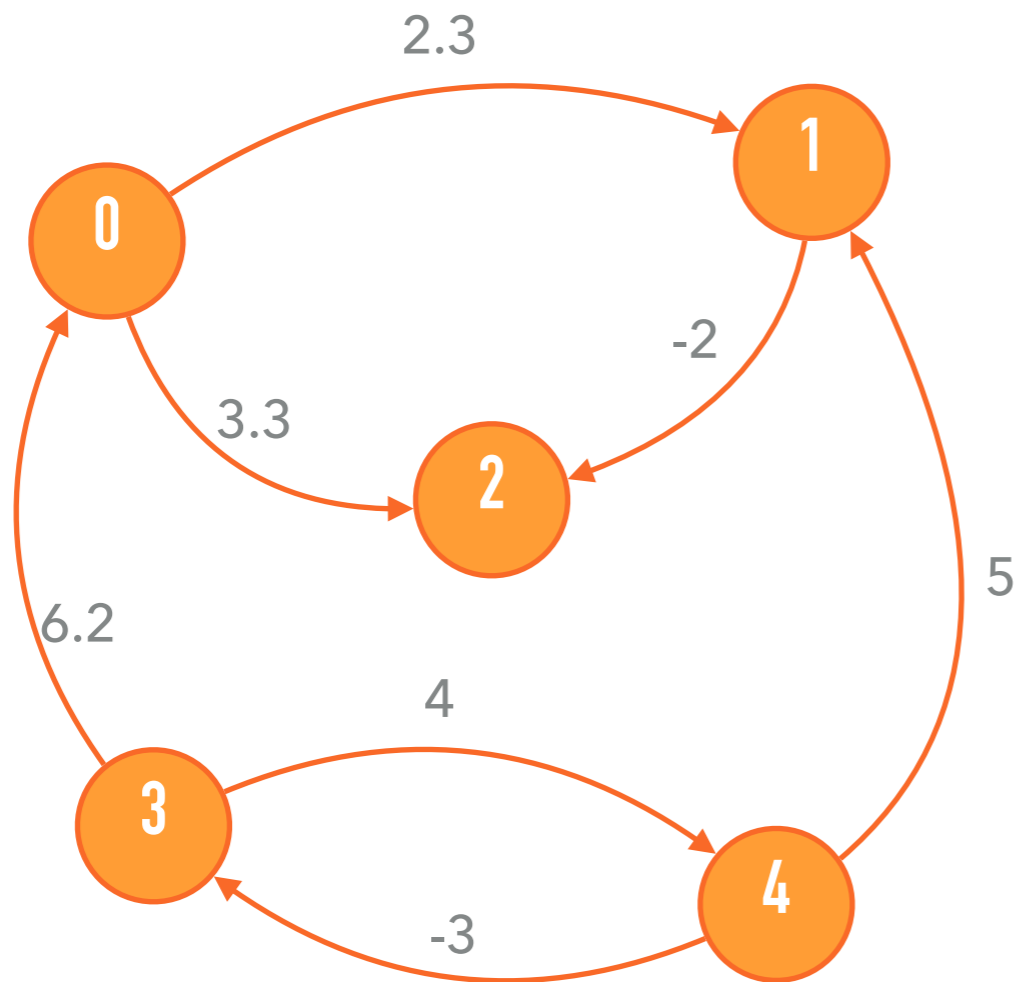
ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL



$W=D[0]=$

0	2.3	3.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	∞	∞	0	4
∞	5	∞	-3	0

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL



W=D[0]=

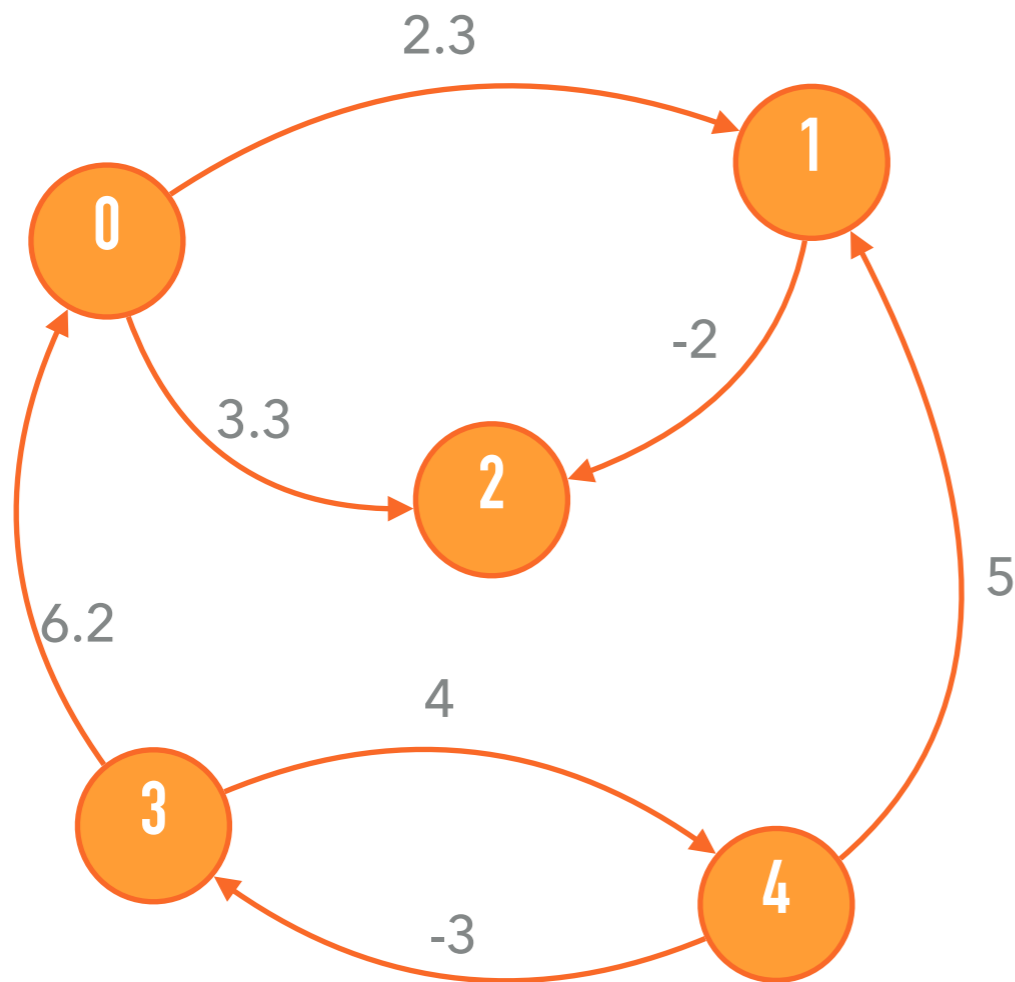
0	2.3	3.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	∞	∞	0	4
∞	5	∞	-3	0

D[1]=

0	2.3	3.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	9.5	0	4
∞	5	∞	-3	0

Possiamo passare per il nodo 0

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL



D[1]=

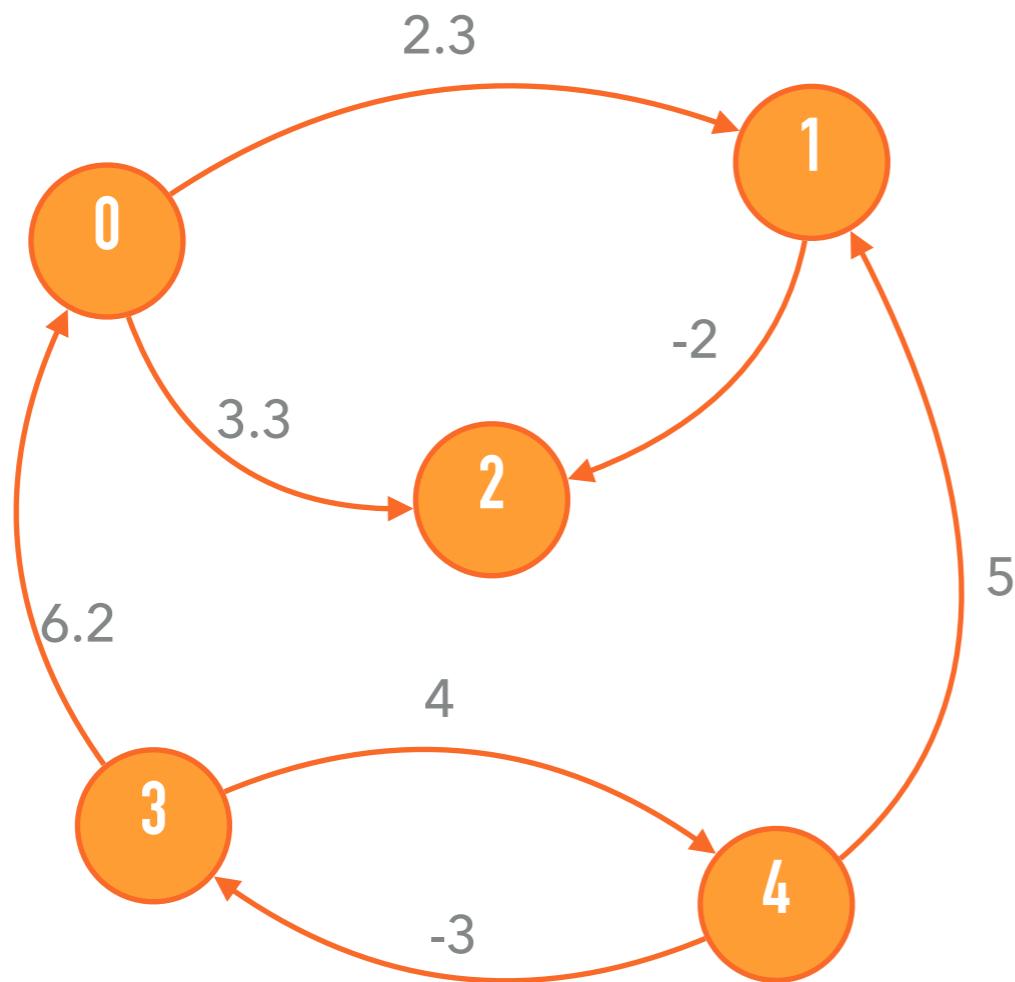
0	2.3	3.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	9.5	0	4
∞	5	∞	-3	0

D[2]=

0	2.3	0.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	6.5	0	4
∞	5	3	-3	0

Possiamo passare per i nodi 0 e 1

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL



D[2]=

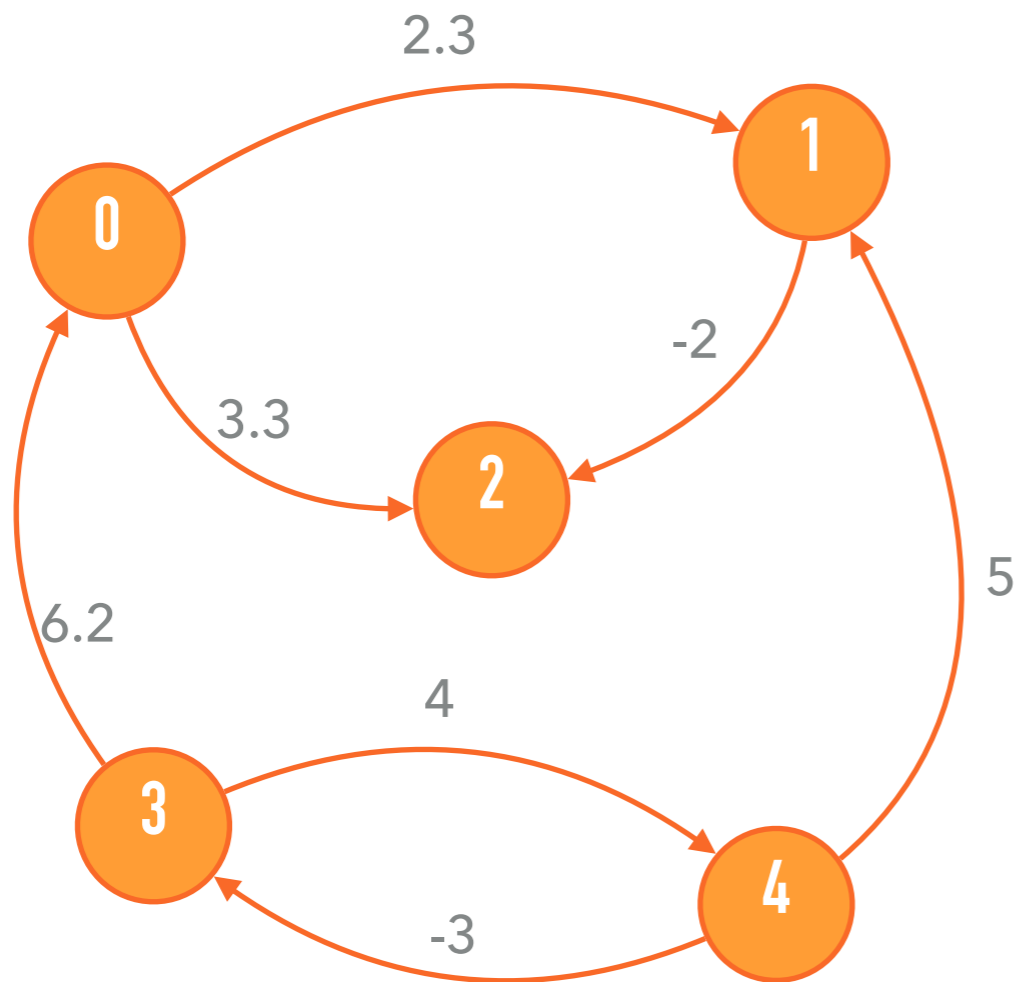
0	2.3	0.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	6.5	0	4
∞	5	3	-3	0

D[3]=

0	2.3	0.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	6.5	0	4
∞	5	3	-3	0

Possiamo passare per i nodi 0, 1 e 2

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL



D[3]=

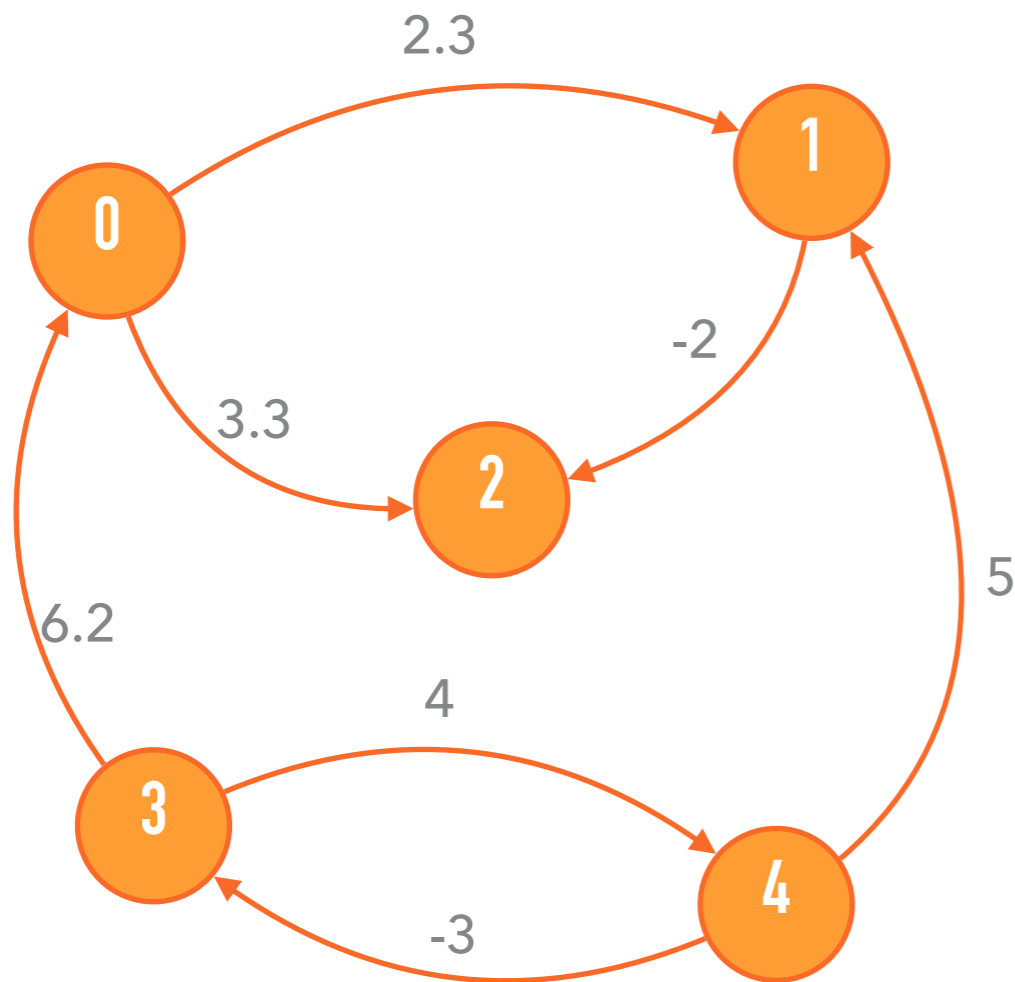
0	2.3	0.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	6.5	0	4
∞	5	3	-3	0

D[4]=

0	2.3	0.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	6.5	0	4
3.2	5	3	-3	0

Possiamo passare per i nodi 0, 1, 2 e 3

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL



Possiamo passare per i nodi 0, 1, 2, 3 e 4

D[4]=

0	2.3	0.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	6.5	0	4
3.2	5	3	-3	0

D[5]=

0	2.3	0.3	∞	∞
∞	0	-2	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞
6.2	8.5	6.5	0	4
3.2	5	3	-3	0

Matrice con la lunghezza dei percorsi di costo minimo tra tutte le coppie di vertici

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL: COMPLESSITÀ

- ▶ Abbiamo tre cicli for innestati e ognuno di questi cicli for svolge $|V| = n$ iterazioni
- ▶ Ne segue che il tempo di esecuzione è $O(V^3)$, quindi cubico
- ▶ Notiamo che rispetto all'algoritmo di Bellman-Ford, che richiede tempo $O(VE)$ con l'algoritmo di Floyd-Warshall otteniamo la distanza tra ogni coppia di vertici, non solo a partire da un nodo sorgente dato

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL: VARIANTI

- ▶ Possiamo aggiungere molteplici restrizioni e varianti all'algoritmo di Floyd-Warshall a seconda delle necessità
- ▶ Come esempio, pensiamo di voler stabilire per ogni coppia di nodi i e j il cammino semplice meno costoso per andare da i a j che però contenga un numero pari di nodi
- ▶ Come possiamo modificare l'algoritmo?

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL: VARIANTI

- ▶ Teniamo traccia di una informazione aggiuntiva: se il cammino che abbiamo è con un numero pari o dispari di nodi:
 - ▶ $d_{i,j}^{k,\text{pari}}$ è il costo minimo per andare da i a j passando per un numero pari di nodi usando solo $\{0, \dots, k-1\}$ come nodi intermedi
 - ▶ $d_{i,j}^{k,\text{dispari}}$ è definito in modo simile ma con un numero dispari di nodi

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL: VARIANTI

▶ I casi base sono:

▶ $d_{i,i}^{0,\text{pari}} = 0$

▶ $d_{i,j}^{0,\text{pari}} = w_{i,j}$ se esiste l'arco (i, j)

▶ $d_{i,j}^{0,\text{pari}} = +\infty$ altrimenti

▶ $d_{i,j}^{0,\text{dispari}} = +\infty$ dato che senza nodi intermedi ogni percorso ha solo un numero pari di nodi intermedi

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL: VARIANTI

- ▶ Il calcolo delle soluzioni di sotto-problemi cambia solo per mantenere corretta la parità:
- ▶ $d_{i,j}^{k+1,\text{pari}} = \min\{d_{i,j}^{k,\text{pari}}, d_{i,k}^{k,\text{dispari}} + d_{k,j}^{k,\text{pari}}, d_{i,k}^{k,\text{pari}} + d_{k,j}^{k,\text{dispari}}\}$
- ▶ $d_{i,j}^{k+1,\text{dispari}} = \min\{d_{i,j}^{k,\text{dispari}}, d_{i,k}^{k,\text{pari}} + d_{k,j}^{k,\text{pari}}, d_{i,k}^{k,\text{dispari}} + d_{k,j}^{k,\text{dispari}}\}$
- ▶ Ovvero trattiamo in modo esplicito come combinare percorsi di parità diversa cambia la parità del percorso finale

ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL: ESERCIZI

- ▶ Alcune varianti che si possono provare a definire, come esercizio:
- ▶ Dato un grafo stabilire il costo del percorso di lunghezza minima che contiene un numero **dispari di archi**.
- ▶ In questo caso cambia un poco la ricorrenza (e i casi base) perché contiamo gli archi e non i nodi