Lezione 10 dicembre 2021

venerdì 10 dicembre 2021 11:19

Ieri: Dato $f:V\to V$ OL (operatore lineare)

$M^B_B(f)$, $M^e_e(f)$ sono simili

$$M^e_e(f) = S^{-1}\cdot M^B_B(f)\cdot S$$

e matrici simili hanno lo stesso det.

Def.: Il **DETERMINANTE** di $f:V\to V$ è:

$$\det f := \det M^B_B(f)$$

con B base qualunque.

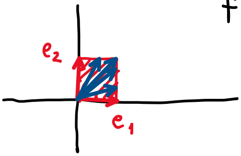
SIGNIFICATO GEOMETRICO:

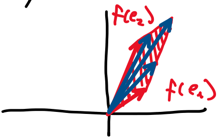
Se $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, prendo $\mathcal{E}$

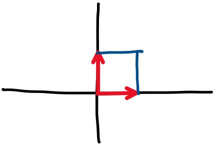
$|\det M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)|$ = area del parallelogramma determinato dalle due colonne di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$,

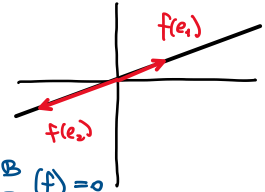
cioè determinato da

$f(e_1)$, $f(e_2)$









$\text{rg}\, f = 1 \Rightarrow \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = 0$

$\Rightarrow$ il quadrato di lato 1 diventa un segmento.

DIAGONALIZZAZIONE DI OPERATORI LINEARI

Def.: Sia $f: V \longrightarrow V$ OL.

Diciamo che f è DIAGONALIZZABILE se $\exists\ \mathcal{B}$ base di V t.c.

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia DIAGONALE

cioè: $$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si dice che $\mathcal{B}$ è una base CHE DIAGONALIZZA f.

OSS.: Se $\mathcal{B}$ diag. f, allora

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0\cdot v_2 + \dots + 0\cdot v_n$$

$$f(v_1) \overset{!}{=} \lambda_1 v_1$$

$$f(v_2) = 0\cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0\cdot v_n$$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$f(v_n) = \lambda_n v_n$$

Ad esempio: tensore di sforzo: questi vettori rappresentano le DIREZIONI PRINCIPALI, tra cui le direzioni di MAX e MIN sforzo.

Def.: Un vettore non nullo $v \in V$, $v \neq 0$

si chiama AUTOVETTORE DI f, RELATIVO

ALL'AUTOVALORE $\lambda \in K$ (eventualmente $\lambda = 0$)

se si ha:

$$\underline{f(v) = \lambda v}$$: questa richiesta è sensata

perché $f: V \to V$

OSS.: f è diagonalizz. $\Longleftrightarrow$ $\exists$ una base $\mathcal{B}$ formata da autovettori per f.

Def.: $Sp(f)$ = SPETTRO di f

$= \{\text{autovalori di } f\} \subseteq K$

Non tutti gli $f: V \to V$ sono diagonalizz.

PROBLEMI:

① Come trovare autovettori?

② Come trovare autovalori?

① Lemma: $v \neq 0$ è autovettore

$\Longleftrightarrow$ $v \in \ker(f - \lambda \, Id_V)$

Dim.: $v \neq 0$ è autovettore $\Longleftrightarrow$

$\exists \, \lambda \in K$ t.c. $f(v) = \lambda v$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{f(v) - \lambda v = 0_V}$

$$\boxed{(f-\lambda\cdot Id_V)(v) = 0_V}$$

$$= f(v) - \lambda\cdot Id_V(v)$$

$$= f(v) - \lambda v$$

$\Updownarrow$

$v \in \ker(f-\lambda\, Id_V)$

Def: Se λ è un autovalore, lo spazio

$\ker(f-\lambda\, Id_V) =: V_\lambda$ si chiama

AUTOSPAZIO DI f RELATIVO a λ.

V_λ è SSV; oss. che $0_V \in \ker(f-\lambda\, Id_V)$

ma 0_V non è considerato autovettore, perché

$$f(0_V) = 0_V = \lambda\cdot 0_V \quad \forall \lambda\in K$$

invece: $\forall\, v \in V_\lambda,\ v\neq 0,\ v$ è autovettore

Infine: $\dim V_\lambda =: m_g(\lambda)$, $V_\lambda \subseteq V$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ.

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq n = \dim V$$

PRIMO CRITERIO DI DIAG...BILITÀ:

Sia $f: V \to V$ e sia $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

Allora

$$f \text{ è diagon.} \iff m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \dots + m_g(\lambda_k) = \dim V = n$$

$$\Vert$$

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_k} = n$$

Inoltre: una base di autovettori

$$\mathcal{B} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{base di } V_{\lambda_1}}}{\mathcal{B}_{V_{\lambda_1}}} \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} \cup \dots \cup \underset{\substack{\downarrow \\ \text{base } V_{\lambda_k}}}{\mathcal{B}_{V_{\lambda_k}}}$$

LEMMA: Autovettori relativi a autovalori diversi sono **LINEARM. INDIP.**

cioè: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$: $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$

e $\forall i = 1, \dots, m$: $f(v_i) = \lambda_i v_i$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ sono LINEAR. INDIP.

DIM.: Per induzione su m:

$m = 1$: $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, v_1 è LIN. IND. ($\Leftrightarrow v_1 \neq 0_V$). ☺

Supp. vero $m-1$, dimostro per m: (*)

cons. $\boxed{\overset{\neq 0}{a_1} v_1 + \overset{\neq 0}{a_2} v_2 + \dots + a_m v_m = 0_V}$ $/ \cdot \lambda_m$

$\Rightarrow f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m) = f(0_V) = 0_V$

AL $= a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_m f(v_m) = 0_V$

$$\boxed{= a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_m \lambda_m v_m = 0_V}$$

$$-$$

$$\boxed{a_1 \lambda_m v_1 + a_2 \lambda_m v_2 + \dots + a_m \lambda_m v_m = 0_V}$$

$$\circledast$$

$$\boxed{a_1(\lambda_1-\lambda_m)v_1 + a_2(\lambda_2-\lambda_m)v_2 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)v_{m-1} = 0_V}$$

Ora: $v_1, \dots, v_{m-1}$ sono $m-1$ autovettori relativi a $m-1$ autovalori diversi

⇒ per l'ipotesi induttiva, sono LIN. INDIP.

⇒ i coeff. di $\circledast$ sono tutti nulli:

$$a_1 \cdot \underbrace{(\lambda_1-\lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \quad , \dots , \quad a_{m-1}\underbrace{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)}_{\neq 0} = 0$$

poiché $\lambda_1 \neq \lambda_m$ ⇓ $a_1 = 0$

poiché $\lambda_{m-1} \neq \lambda_m$ ↓ $a_{m-1} = 0$

⇒ nella $\circledast$ rimane $a_m v_m = 0_V$

ma $v_m \neq 0_V$ è autovettore

⇒ $a_m = 0.$

COROLLARIO: Sia $f: V \longrightarrow V$, $\dim V = n$

Se f ha esattamente n autovalori DIVERSI:

$Sp(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i \neq j$

⇒ f è DIAG... ILE, cioè $\exists$ base di autovettori.

DIM.: Cons. $v_1, \dots, v_n$ autovettori relativi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Per il Lemma sono LIN. INDIP.,

$\dim V = n, \implies \{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base.

② Pb.: Come trovare autovalori?

$$\lambda \in Sp(f) \iff \exists\, v \neq 0 \ : f(v) = \lambda v$$

$$\iff \exists\, v \neq 0, \quad v \in \ker(f - \lambda\, Id_V)$$

$$\iff \ker(f - \lambda\, Id_V) \neq \{0_V\}$$

$$\iff f - \lambda\, Id_V \text{ NON è INIETTIVA}$$

$$\iff f - \lambda\, Id_V : V \longrightarrow V \text{ NON È SURIETTIVA}$$

$$\iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda\, Id_V) \text{ NON ha RG MAX}$$

$$\iff \boxed{\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda\, I_V) = 0}$$

OSS.: $$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda\, Id_V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id_V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot I_n$$

$$\implies \lambda \text{ autovalore} \iff \det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot I_n\right) = 0$$

Es.: $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)$ matrice della proiezione nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

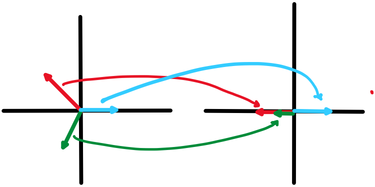
$\lambda = 1/2$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot I_2 =$

NON è AUTOVALORE

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1/2 \text{ non è autovalore}$$



Osservo che $p\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, cioè $p(e_1)=1\cdot e_1$, quindi e_1 è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda=1$. Infatti:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \lambda = 1 \text{ è autovalore.}$$