Lezione 13 dicembre 2021

lunedì 13 dicembre 2021 13:57

Visto: $f: V \to V$ OL

$\lambda \in S_p(f)$ $\quad (\exists\, v \neq 0 : f(v) = \lambda v)$

$$\Leftrightarrow \quad \det \underbrace{\left(M_{B}^{B}(f) - \lambda \cdot I_n \right)}_{\text{ha un nucleo ker non banale}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det \left(M_{B}^{B}(f) - x \cdot I_n \right) \text{ si annulla}$$

con x incognita

per $x = \lambda$

Oss.: $\det\left(M_B^B(f) - x \cdot I_n\right)$ è un polinomio in x, di grado $n = \dim V$

Es.: $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M_B^B(f) - x \cdot I_n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 0-x & 1 \\ 1 & 1 & 0-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

$$\det = (1-x) \cdot \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = (1-x) \cdot (x^2 - 1)$$

↓ Laplace 1^a riga

$$= (1-x)(x-1)(x+1)$$

$$= -(x-1)^2 \cdot (x+1)$$

$$\Rightarrow S_p(f) = \{1, -1\}$$

Es.: $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$M_B^B(f) - x \cdot \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & -x \end{pmatrix}$$

$$\det = (1-x)\cdot(-x) - 4$$

$$\overset{!}{=} x^2 - x - 4$$

Def. Il polinomio

$$p_f(x) := \det\left(M_B^B(f) - x \cdot \mathbb{I}_n\right)$$

si chiama POLINOMIO CARATTERISTICO DI f.

Non dipende dalla scelta di B :

$$M_B^B(f) - x \cdot \mathbb{I}_n = M_B^B(f - x \cdot Id_V) = A$$

e cambiando base, trovo una matrice

SIMILE $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$, S cambio di base

Def. Se $C \in M_n(K)$, il POL. CARATT.

di C è

$$p_C(x) := \det(C - x \cdot \mathbb{I}_n).$$

OSS.: Il grado $\quad gr\, p_f(x) = n$,

e il coefficiente di x^n è dato da:

$$(-1)^n$$

(si può dimostrare per induzione su n).

Il termine noto di $p_f(x)$:

$$p_f(x) = \det\left(M_B^B(f) - x\cdot I_n\right)$$

termine noto: $p_f(0) = \det M_B^B(f) = \det f$

QUINDI: $\lambda \in S_p(f) \Longleftrightarrow \lambda$ è radice di $p_f(x)$.

$\underset{\text{Teorema di Ruffini}}{\Longleftrightarrow}$ $(x-\lambda)$ è un fattore di $p_f(x)$, cioè

$$p_f(x) = (x-\lambda)\cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{polinomio di grado } n-1}}{q(x)}$$

Def. Sia $\lambda \in S_p(f)$. La sua MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA: $m_a(\lambda)$ è la MOLTEPLICITÀ di λ come radice di $p_f(x)$; cioè

$$p_f(x) = (x-\lambda)^{m_a(\lambda)}\cdot q(x)$$

e λ non è radice di $q(x) \Longleftrightarrow (x-\lambda)$ non divide $q(x)$

$\Longleftrightarrow q(\lambda) \neq 0$

Es. di prima: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$p_f(x) = -(x-1)^{\textcircled{2}}(x+1) = -(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$$

$Sp(f) = \{1, -1\}$, $\quad m_a(1) = 2$

$m_a(-1) = 1$

Ricordo: abbiamo introdotto: $m_g(\lambda)$ MOLTEPL. GEOMETRICA di λ:

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda = \dim \ker(f - \lambda\, Id_V)$$

TEOREMA: Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n \\ \Downarrow \\ V_\lambda \neq \{0_V\} \end{array}}$$

SECONDO CRITERIO DI DIAGONALIZZ.

$f: V \longrightarrow V$, V sv su $\mathbb{K}$ è diagonalizzabile

$\Longleftrightarrow$ ① $p_f(x)$ si può esprimere come prodotto di fattori lineari

($p_f(x)$ = prodotto di polinomi di primo grado, con eventuali ripetizioni)

$$p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots\cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

e $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$

② $\forall \lambda \in Sp(f)$, si ha $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

OSS.: La ①, se $K = \mathbb{C}$, è sempre soddisfatta grazie TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA:

Ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha una radice.

Se λ è radice di $p(x)$, $p(x) = (x-\lambda) \cdot q(x)$, e applico TFA a $q(x)$, e induttivamente trovo una fattorizzazione di $p(x)$ in fattori lineari.

ISTRUZIONI PER VERIFICARE se f è DIAGONALIZZ.

① $f: V \to V$, fisso $\mathcal{B}$ a piacere, scrivo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, cons.

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - x \cdot I_n$, e ne calcolo il det, ho $p_f(x)$. (consiglio: cercare di mettere in evidenza eventuali fattori)

② Cerco tutte le radici di $p_f(x)$ con le relative molt. algebriche: $m_1, \dots, m_k$

Se $m_1 + \dots + m_k < n$, allora la 1. del secondo criterio non è verificata, quindi f NON è diag. MI FERMO

Se invece $m_1 + \dots + m_k = n$, procedo.

③ $\forall \lambda_i \in Sp(f)$, calcolo $m_g(\lambda_i)$:

$$m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i} = \dim \ker(f - \lambda_i \cdot Id_V)$$

$$\overset{!}{=} \dim \ker(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda_i \cdot I_n)$$

= dim spazio delle soluzioni del SLO

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda_i \cdot I_n) \cdot X = 0$$

$$= n - rg(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda_i \cdot I_n)$$

④ Controllo che $\forall i$: $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

se non vale per qualche i, f NON è diagonalizz.

MI FERMO.

⑤ Se $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ $\forall i$, allora f È DIAGONALIZZ., e per trovare BASE di autovettori:

$\forall \lambda_i$, fisso una base di V_{λ_i} : $\mathcal{B}_i$

e pongo $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$

ESEMPI:

ⓐ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ -4x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$

Dire se f è diag. oppure no.

Scelgo $\mathcal{E}$ base canonica:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) - x \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2-x & -2 & -5 \\ 0 & -x & -4 \\ 0 & 1 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$p_f(x) = \det \left(\begin{array}{c|cc|} 2-x & -2 & -5 \\ \cline{2-3} 0 & -x & -4 \\ 0 & 1 & 3-x \\ \cline{2-3} \end{array}\right)$$

Laplace 1ª colonna

$$= (2-x) \cdot \det \begin{pmatrix} -x & -4 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (2-x) \cdot \left((3-x) \cdot (-x) + 4 \right)$$

$$= (2-x) \left(x^2 - 3x + 4 \right)$$

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$$

$\Rightarrow$ $x^2 - 3x + 4$ NON ha radici reali

$\Rightarrow$ $p_f(x)$ NON è prodotto di 3 fattori lineari

$\Rightarrow$ f NON è diagonalizzabile.

ⓑ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x_1 + 6x_3 \\ 2x_2 \\ -3x_1 - 4x_3 \end{pmatrix}$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$p_f(x) = \boxed{\begin{pmatrix}5-x & 0 & 6\\ 0 & 2-x & 0\\ -3 & 0 & -4-x\end{pmatrix}}$$

$$\det = (2-x)\cdot \det\begin{pmatrix}5-x & 6\\ -3 & -4-x\end{pmatrix}$$

$$= (2-x)\cdot\left((5-x)(-4-x) + 18\right.$$

$$= (2-x)\left(x^2 - x - 2\right)$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \mp 3}{2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

$$= (2-x)(x-2)(x+1)$$

$$= -(x-2)^{\textcircled{2}}(x+1)^{\textcircled{1}}$$

3 fattori lineari $\Longrightarrow$ cond. ① del Secondo criterio è ok.

$$\Longrightarrow Sp(f) = \{2, -1\}$$

$m_a(2) = 2, \quad m_a(-1) = 1$

Passo a vedere le $m_g(2)$ e $m_g(-1)$:

Osservo: $1 \le m_g(-1) \le m_a(-1) = 1$

$\Longrightarrow m_g(-1) = m_a(-1) = 1$

Devo controllare solo $\lambda = 2$:

$$m_g(2) = \dim V_2 = \dim \ker\left(\underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) - 2I_3}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 0 & 6\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & 0 & -4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \dim\ker\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

$$= n - rg\, f = 3 - 1 = 2$$

$m_a(2) = 2 = m_g(2) \Longrightarrow$ ☺

f è DIAGONALIZZ.

BASE DI AUTOVETTORI :

cerco base di V_{-1} e V_2

$$V_{-1} = \ker\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} - (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

eq. cartesiane per V_{-1} sono date dal SLO:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0 \end{cases}$$

RETTA VETTORIALE

base: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO: verificare che $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Base di $V_2 = \ker\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

eq. cartesiane: $3x_1 + 6x_3 = 0$ piano vettoriale

$x_1 + 2x_3 = 0$

base: gen. soluzione $x_3 = t$, $x_2 = s$, $x_1 = -2t$

$$\begin{pmatrix} -2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

In questa base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$