Capitolo 10

Matrici invertibili e cambiamento di base

10.1 Matrici invertibili

Definizione 10.1.1. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a entrate in K. A è detta **invertibile** se esiste $A' \in M(n \times n, K)$ tale che $AA' = A'A = E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. In tal caso A' è l'inversa di A e la si denota A^{-1}.

Denoteremo $\mathrm{GL}(n, K) \subset M(n \times n, K)$ il sottinsieme delle matrici invertibili.

Proposizione 10.1.2. *$GL(n, K)$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne, detto gruppo lineare generale.*

Dimostrazione.

1. $\mathrm{GL}(n, K)$ è chiuso rispetto al prodotto: se A, B sono matrici invertibili $n \times n$, anche AB è invertibile, e si ha $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Infatti $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$.

2. E_n, che è l'elemento neutro rispetto al prodotto, è invertibile, e coincide con la sua inversa.

3. Se A è invertibile, anche la sua inversa A^{-1} è invertibile, e precisamente $(A^{-1})^{-1} = A$. □

Osservazione 13. $\mathrm{GL}(n, K)$ non è un sottospazio vettoriale di $M(n \times n, K)$. Per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quest'ultima è somma di matrici invertibili, infatti la prima è la matrice identica, e anche la seconda coincide con la propria inversa. Ma la somma non è invertibile. Infatti moltiplicata per qualunque altra matrice non può dare la matrice identica: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$.

Osservazione 14. La trasposta di una matrice invertibile è invertibile e si ha $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Teorema 10.1.3. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali della stessa dimensione finita n; siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V e W. Allora f è un isomorfismo se e solo se $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice invertibile; la sua inversa è proprio $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f^{-1})$.*

Dimostrazione. Se f è un isomorfismo esiste l'isomorfismo inverso f' tale che $f \circ f' = \mathrm{id}_W$ e $f' \circ f = \mathrm{id}_V$. Poniamo $A = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f')$. Allora

$$AA' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f') \overset{9.6}{=} M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f \circ f') = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_W) = E_n,$$

$$A'A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f') M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) \overset{9.6}{=} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f' \circ f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = E_n.$$

Dunque $A' = A^{-1}$.

Viceversa, se $A = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile, allora $L(A)$ risulta un isomorfismo con isomorfismo inverso $L(A^{-1})$: infatti $AA^{-1} = E_n$, quindi $L(AA^{-1}) \overset{9.7}{=} L(A) \circ L(A^{-1}) = L(E_n) = \mathrm{id}_{K^n}$; analogamente $L(A^{-1}) \circ L(A) = \mathrm{id}_{K^n}$, quindi $L(A^{-1})$ è l'applicazione inversa di $L(A)$. Consideriamo infine il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}'}} \\ K^n & \xrightarrow{L(A)} & K^m \end{array} :$$

poichè $f = \kappa_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ L(A) \circ \kappa_{\mathcal{B}}$, ricordando che composizione di isomorfismi è isomorfismo, concludiamo che anche f è un isomorfismo. □

Osservazione 15. $L(A)$ è un isomorfismo se e solo se A è invertibile.

Corollario 10.1.4. *Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *A è invertibile;*
2. $\mathrm{rg}(A)$ *è massimo pari a n;*
3. *le n colonne di A sono linearmente indipendenti;*
4. *le n righe di A sono linearmente indipendenti;*
5. *le n colonne di A generano lo spazio delle colonne;*
6. *le n righe di A generano lo spazio delle righe.*

Dimostrazione. Dal Teorema 10.1.3 segue: A è invertibile se e solo se $L(A)$ è un isomorfismo, se e solo se $L(A)$ è suriettiva (perchè endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita), se e solo se le n colonne di A generano il codominio K^n, se e solo se il rango di A è massimo n. Ricordando che rango per righe e per colonne coincidono (Teorema 7.2.3) e la Proposizione 7.2.1, otteniamo l'equivalenza con le altre condizioni. □

10.2 Cambiamento di base

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione n. Supponiamo che $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ siano due basi di V. Ci chiediamo come si passa dalle coordinate rispetto ad $\mathcal{A}$ alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e viceversa. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}}"] & V \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r] & K^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}}"] & v \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] \\ (x_1, \dots, x_n) \arrow[r] & (y_1, \dots, y_n) \end{tikzcd}$$

dove per ogni vettore $v \in V$ si ha $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$.

Siccome $\mathrm{Hom}(K^n, K^n) \simeq M(n \times n, K)$, l'applicazione lineare "in basso" $K^n \to K^n$, che manda le coordinate di v rispetto ad $\mathcal{A}$ $(x_1, \dots, x_n)$ in quelle rispetto a $\mathcal{B}$ $(y_1, \dots, y_n)$, è del tipo $L(M)$, dove $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Definizione 10.2.1. Tale matrice $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ è detta **matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ o matrice del cambiamento di base.**

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) = M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{id}_V(v_1) & \mathrm{id}_V(v_2) & \dots & \mathrm{id}_V(v_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

La prima colonna contiene le coordinate di v_1 rispetto a $\mathcal{B}$, la seconda le coordinate di v_2 rispetto a $\mathcal{B}$, ecc., cioè nelle colonne di M sono contenute le coordinate dei vettori di $\mathcal{A}$ rispetto a $\mathcal{B}$: $v_1 = m_{11} w_1 + \dots + m_{n1} w_n, \dots, v_n = m_{1n} w_1 + \dots + m_{nn} w_n$.

Osservazione 16. Siccome la matrice del cambiamento di base è la matrice che rappresenta id_V, che è ovviamente un isomorfismo, rispetto a una scelta di basi, il rango di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ è uguale a n, cioè la matrice è invertibile (per il Teorema 10.1.3). La sua inversa è proprio $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$: ciò segue dal Teorema 10.1.3. Lo si può vedere anche direttamente guardando il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}}"] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}}"] \\ K^n \arrow[r, "L(M)"] & K^n \arrow[r, "L(M')"] & K^n \end{tikzcd}$$

in cui $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$, $M' = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$. Si ha chiaramente che la composta delle due applicazioni in basso è l'applicazione identica di K^n, dunque $\mathrm{id}_{K^n} = L(M') \circ L(M) =$

$L(M'M)$ per quanto visto nella Sezione 9.7. Concludiamo che $M'M = E_n$. Analogamente si prova che anche $MM' = E_n$. Dunque $M' = M^{-1}$.

Osserviamo che le colonne di M', ossia di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)^{-1}$, contengono le coordinate rispetto ad $\mathcal{A}$ dei vettori della "nuova" base $\mathcal{B}$.

Osservazione 17. Dall'isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ segue che vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti i vettori $\kappa_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, \kappa_{\mathcal{B}}(v_n)$ delle loro coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

Perciò, data una base $\mathcal{B}$ di V, **ogni matrice invertibile M può essere interpretata come matrice di un cambiamento di base** da $\mathcal{B}$ a una nuova base. I vettori della nuova base sono quelli le cui coordinate, rispetto a $\mathcal{B}$, sono contenute nelle colonne di M^{-1}.

10.3 Matrici di un'applicazione lineare rispetto a basi diverse

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Supponiamo che siano date due basi di V: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ e due basi di W: $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. In questa sezione vogliamo trovare la relazione che c'è fra $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f)$ e $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(f)$. Otterremo:

Teorema 10.3.1.

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_W) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f) M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_V).$$

Dimostrazione. La relazione si ottiene facilmente considerando i diagrammi commutativi del tipo (9.2) per le applicazioni $f, \mathrm{id}_V, \mathrm{id}_W$, relativi alle basi considerate:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\mathrm{id}_W} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{A}'}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{\mathcal{B}'}} \\ K^n & \xrightarrow{L(T)} & K^n & \xrightarrow{L(M)} & K^m & \xrightarrow{L(S)} & K^m \end{array} \tag{10.1}$$

dove $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f)$, $S = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_W)$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ basi di W, $T = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_V)$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{A}'$ ad $\mathcal{A}$ basi di V. Allora, interpretando f come la composizione della tre applicazioni della prima riga, vediamo che la matrice di f rispetto ad $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ è quella che corrisponde alla composizione $L(S) \circ L(M) \circ L(T)$, ed è quindi SMT (Sezione 9.7). □

In particolare, dal momento che S e T sono matrici di cambiamenti di base, abbiamo ottenuto che **due matrici che rappresentano l'applicazione lineare f rispetto a basi diverse differiscono per il prodotto a destra e a sinistra per matrici invertibili.**

Come conseguenza del Teorema 9.3.1 - Forma canonica - otteniamo allora:

Corollario 10.3.2. *Data una matrice $M \in M(m \times n, K)$, esistono matrici invertibili S $m \times m$, e T $n \times n$ tali che*

$$SMT = \begin{array}{r} \\ r \\ \\ m-r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad n-r \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ --- & --- \\ 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \tag{10.2}$$

dove $r = \mathrm{rg}(M)$.

Dimostrazione. Consideriamo $L(M) : K^n \to K^m$: M è la sua matrice rispetto alle basi canoniche. Ma esistono basi di K^n e K^m, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, rispetto alle quali la matrice di $L(M)$ è

$$\begin{array}{c} \\ r \\ \\ m-r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & r & & n-r & \end{array} \\ \begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ --- & | & --- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{10.3}$$

Siano $T = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{K^n})$, $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_{K^m})$. Per il Teorema 10.3.1, SMT coincide con la matrice (10.3). $\square$

Esempio 10.3.3. Consideriamo l'applicazione lineare $f : V \to W$ con $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, definita da $f(p(t)) = t^2 p'(t+1)$. Se $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$, $\mathcal{B}'(1, t, t^2, t^3)$, allora

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora consideriamo $\mathcal{A} = (1, t-1, (t-1)^2)$ in V e $\mathcal{A}' = (1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3)$ in W.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

ha rango 3 e questo conferma che $\mathcal{A}$ è una base di V.

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

anche questa matrice ha rango massimo 4, dunque è invertibile, il che conferma che anche $\mathcal{A}'$ è una base. Applicando il Teorema 10.3.1, otteniamo che

$$M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W)^{-1} M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V).$$

Nella Sezione 10.5 vedremo come calcolare $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W)^{-1}$.

10.4 Il caso di un endomorfismo

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Fissiamo la stessa base $\mathcal{A}$ di V in dominio e codominio e consideriamo la matrice $M_{\mathcal{A}}(f)$; poi prendiamo un'altra base $\mathcal{B}$ di V e consideriamo $M_{\mathcal{B}}(f)$. Dal Teorema 10.3.1 otteniamo

$$M_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) M_{\mathcal{A}}(f) M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V),$$

ma ora le due matrici "ai lati" $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ sono matrici una inversa dell'altra, perchè rappresentano cambiamenti di base opposti.

Posta $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$, la matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, abbiamo perciò $M_{\mathcal{B}}(f) = SM_{\mathcal{A}}(f)S^{-1}$.

Notiamo che, se abbiamo le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto ad $\mathcal{A}$, possiamo scrivere direttamente la matrice $S^{-1} = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.

Definizione 10.4.1 (Relazione di similitudine di matrici)**.** Due matrici quadrate A, B, $n \times n$ a coefficienti in K, si dicono **simili** se esiste $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ tale che $A = SBS^{-1}$.

La similitudine è una relazione d'equivalenza in $M(n \times n, K)$. Infatti

- $A = E_n A E_n^{-1}$;
- se $A = SBS^{-1}$, allora, moltiplicando a sinistra per S^{-1} e a destra per S otteniamo $B = S^{-1}AS$.
- se $A = SBS^{-1}$ e $B = MCM^{-1}$, allora $A = S(MCM^{-1})S^{-1} = (SM)C(SM)^{-1}$.

Dal momento che ogni matrice invertibile si può interpretare come la matrice di un cambiamento di base, si ha che due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse. In particolare **matrici simili hanno lo stesso rango**.

Un problema molto importante e non banale è quello di trovare un rappresentante "semplice" o "canonico" per la classe di similitudine di una matrice data, ossia una sua "forma canonica". In altre parole, si vuole descrivere l'insieme quoziente. Tratteremo il problema della diagonalizzabilità di una matrice quadrata data M, ossia di saper dire se M è simile a una matrice diagonale. Vedremo che non sempre la risposta è affermativa. In alcuni casi in cui la risposta è negativa, vedremo che è possibile considerare un'altra forma canonica, detta di Jordan.

10.5 Algoritmo per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile

Iniziamo provando un risultato preliminare.

Proposizione 10.5.1. *Sia A una matrice $n \times n$ tale che esiste una matrice $n \times n$ B per cui $BA = E_n$, oppure esiste una matrice C per cui $AC = E_n$. Allora A è invertibile. Inoltre nel primo caso $A^{-1} = B$ e nel secondo caso $A^{-1} = C$.*

Dimostrazione. Se $BA = E_n$, si ha $\mathrm{id}_{K^n} = L(E_n) = L(BA) = L(B) \circ L(A)$ (Sezione 9.7). Ma allora $L(A)$ è iniettiva: infatti se $L(A)(x) = 0$, si ha anche $L(B)(L(A)(x)) = L(B)(0) = 0$, e dunque $x \in \ker(L(B) \circ L(A)) = \ker(\mathrm{id}_{K^n}) = (0)$. Essendo $L(A)$ un endomorfismo iniettivo di K^n che ha dimensione finita, $L(A)$ è un isomorfismo, e perciò A è invertibile. Ora da $BA = E_n$ segue $B = (BA)A^{-1} = E_n A^{-1} = A^{-1}$ ossia $B = A^{-1}$.

Se invece $AC = E_n$, $L(AC) = L(A) \circ L(C) = \mathrm{id}_{K^n}$. Allora $L(A)$ è suriettiva: se $y \in K^n$, si ha $y = L(A)(L(C)(y))$ e dunque $y \in \mathrm{Im}\, L(A)$. Come nel caso precedente allora segue che $L(A)$ è un isomorfismo e A è invertibile. Inoltre da $AC = E_n$ segue che $A^{-1}(AC) = A^{-1}$ e dunque $C = A^{-1}$. □

Questo risultato permette di cercare l'inversa di una matrice A imponendo a una matrice incognita X soltanto una delle due condizioni $AX = E_n$ o $XA = E_n$.

Sia dunque A una matrice $n \times n$ invertibile. Vogliamo trovare la sua inversa. Chiamiamo $X = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ di incognite: vogliamo risolvere l'equazione matriciale $AX = E_n$.

Risolvere questa equazione matriciale è equivalente a risolvere gli n sistemi lineari:

$$\begin{array}{rl} AX^1 = & e_1 \\ AX^2 = & e_2 \\ \vdots & \\ AX^n = & e_n \end{array} \tag{10.4}$$

dove $X^1, X^2, \dots, X^n$ sono le colonne di X. Dobbiamo dunque risolvere n sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti A, le cui colonne dei termini noti sono $e_1, \dots, e_n$. Poichè A è invertibile ognuno di tali sistemi ha una e una sola soluzione. Per risolverli possiamo usare l'algoritmo di Gauss, riducendo a gradini le matrici complete degli n sistemi, che sono $(A \mid e_i)$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Le trasformazioni elementari da eseguire sono le stesse per tutti i sistemi, quindi possiamo eseguirle per tutti i sistemi contemporaneamente; partiamo dunque dalla matrice ottenuta aggiungendo ad A come colonne tutti gli n vettori della base canonica di K^n, ossia la matrice identica E_n, e operiamo con trasformazioni elementari in modo da arrivare a una matrice $(B \mid C)$ dove B è una matrice $n \times n$ a gradini con n pivot, dunque una matrice triangolare superiore:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & | & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (A \mid E_n) \ \to (B \mid C). \tag{10.5}$$

La matrice $(B \mid C)$ ci dà n sistemi lineari a gradini equivalenti ai primi n. Ora continuiamo operando di nuovo con trasformazioni elementari sulle righe ma a partire dal basso, per mandare a zero tutti gli elementi sopra la diagonale principale di B.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & | & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} & | & c_{21} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & | & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} & | & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \to$$

Essendo $b_{nn} \neq 0$ possiamo usare l'ultima riga $(b_n \mid c_n)$ per mandare a zero gli elementi dell'ultima colonna di B sopra a b_{nn}, cioè alla riga i-esima $(b_i \mid c_i)$ sostituiamo $(b_i - \frac{b_{in}}{b_{nn}} b_n \mid c_i - \frac{b_{in}}{b_{nn}} c_n)$:

$$\to \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & 0 & | & c'_{11} & \dots & c'_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 0 & | & c'_{21} & \dots & c'_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & | & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & 0 & | & c'_{n-1,n} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} & | & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \to$$

L'ultima riga di $(B \mid C)$ e tutto il resto di B sono rimasti invariati, mentre C è cambiata; ora usiamo la penultima riga per mandare a zero gli elementi sopra a $b_{n-1,n-1}$, e così via finchè arriviamo a una matrice del tipo:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 & \mid & d_{11} & \dots & d_{1n} \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 & \mid & d_{12} & \dots & d_{2n} \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mid & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} & \mid & d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}:$$

una matrice diagonale con tutti gli elementi della diagonale non nulli, seguita da una matrice D. Ora con trasformazioni elementari del I tipo trasformiamo la matrice diagonale di sinistra in E_n, e otteniamo una matrice $(E_n \mid A')$: A' risulta essere proprio A^{-1}, l'inversa di A. Infatti i sistemi lineari (10.4) sono stati trasformati nei sistemi equivalenti:

$$\begin{matrix} X^1 = & a'^1 \\ X^2 = & a'^2 \\ \vdots & \\ X^n = & a'^n \end{matrix} \quad . \tag{10.6}$$

Abbiamo dunque descritto un algoritmo per la costruzione dell'inversa di una matrice invertibile.

Osserviamo che, se a priori non sappiamo se una matrice A è invertibile o meno, possiamo comunque eseguire i primi passi dell'algoritmo fino alla determinazione dei pivot di A, e così rispondere a questa prima domanda.

Esempio 10.5.2. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Eseguiamo l'algoritmo.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \mid & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \mid & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & \mid & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Siamo arrivati a determinare i pivot di A e abbiamo così verificato che A ha rango 3 ed è perciò invertibile; ora proseguiamo con l'algoritmo per arrivare ad avere una matrice diagonale nella prima metà.

$$\overset{III}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \mid & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \mid & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \mid & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

È sempre consigliabile a questo punto fare la verifica che

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 10.5.3 (Esempio 10.3.3 - continua)**.** Calcoliamo l'inversa di

$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che è già triangolare superiore con tutti i pivot uguali a 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III}{\to} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III}{\to}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III}{\to} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Abbiamo trovata l'inversa di $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W)$. La matrice cercata è

$$M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_W)^{-1} M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 24 \\ 0 & 4 & 32 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 0 & 4 & 24 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Capitolo 11

Determinante

In questo capitolo introdurremo la nozione di determinante, su uno spazio vettoriale di dimensione finita o per matrici. Premettiamo alcune proprietà dei gruppi di permutazioni che ci saranno utili per dare le definizioni.

11.1 Gruppi di permutazioni

Sia $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ l'insieme dei primi n numeri naturali.

Definizione 11.1.1. Una **permutazione** dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ è una biiezione

$$\begin{array}{rll} \sigma : & I_n \to & I_n \\ & 1 \to & \sigma(1) \\ & 2 \to & \sigma(2) \\ & \vdots & \\ & n \to & \sigma(n) \end{array}$$

Per esempio, per $n = 3$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ ha sei permutazioni:

$$1\ 2\ 3,\ \ 1\ 3\ 2,\ \ 2\ 1\ 3,\ \ 2\ 3\ 1,\ \ 3\ 1\ 2,\ \ 3\ 2\ 1.$$

Denoteremo $\mathcal{S}_n$ l'insieme delle permutazioni di I_n: ha $n!$ elementi, in quanto ci sono n scelte per $\sigma(1)$, $n-1$ scelte per $\sigma(2)$, ecc.

Osserviamo che $\mathcal{S}_n$ è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni (Esempio 1.2.3), e che non è abeliano per $n \geq 3$. È detto **gruppo simmetrico su n oggetti**.

Esempio 11.1.2.

- Per $n = 1$ $\mathcal{S}_1 = \{*\}$ si riduce a un elemento;
- Per $n = 2$ $\mathcal{S}_2$ ha due elementi: $1\ 2,\ 2\ 1$; è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Introduciamo la seguente notazione per indicare come opera una permutazione σ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Per esempio

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \ \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

che conferma che $\mathcal{S}_3$ non è abeliano.

11.2 Cicli

Definizione 11.2.1. Un **ciclo o permutazione ciclica** di lunghezza k in $\mathcal{S}_n$ è una permutazione che manda successivamente $n_1 \to n_2 \to \cdots \to n_k \to n_1$, dove $n_1, n_2, \dots, n_k$ sono k elementi distinti di I_n, mentre gli altri elementi di I_n vengono lasciati fissi. Lo si denota $(n_1 \ n_2 \ \dots n_k)$.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 11.2.2. 1. Sia $\tau \in \mathcal{S}_7$ la permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $1 \to 5 \to 7 \to 4 \to 1$, e $2 \to 6 \to 3 \to 2$: il primo è un **ciclo o permutazione ciclica di lunghezza** 4 e il secondo un ciclo di lunghezza 3. Si usa la notazione $\tau = (1\ 5\ 7\ 4)(2\ 6\ 3)$.

2. Sia $\sigma \in \mathcal{S}_7$ la seguente permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $1 \to 5 \to 7 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1$: questo è un **ciclo di lunghezza** 6, invece 6 rimane fisso in σ, è un ciclo di lunghezza 1. Si scrive $\sigma = (1\ 5\ 7\ 4\ 2\ 3)$, ossia l'elemento che rimane fisso non si scrive.

3. $$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Questa volta $1 \to 2 \to 1$: ho un ciclo di lunghezza 2 $(1\ 2)$; $3 \to 5 \to 7 \to 6 \to 3$: un ciclo di lunghezza 4 $(3\ 5\ 7\ 6)$; $4 \to 4$: ciclo di lunghezza 1. La permutazione data σ' si indica $(1\ 2)(3\ 5\ 7\ 6)$: è prodotto di due cicli disgiunti di lunghezza 2 e 4: sono permutabili.

Per la composizione di permutazioni si usa una notazione diversa rispetto a quella usata di solito per la composizione di applicazioni: anzichè scrivere per esempio $\sigma \circ \tau$ si usa $\tau\sigma$, per intendere che si applica prima τ e poi σ. Si parla di **prodotto di permutazioni**.

Per esempio: $(1\ 3\ 5)(3\ 1\ 7\ 4)(6\ 7\ 2)$ è un prodotto di tre cicli non disgiunti; è la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 6\ 7\ 4\ 3\ 5):$$

è un 6-ciclo.

Definizione 11.2.3. Un 2-ciclo è chiamato **trasposizione**. È del tipo $(n_1\ n_2)$, ossia n_1 e n_2 vengono scambiati e tutti gli altri elementi rimangono fissi.

Osservazione 18.
1. Osserviamo che $(3\ 5\ 1) = (5\ 1\ 3) = (1\ 3\ 5)$, ossia un ciclo può essere "iniziato" in una posizione qualunque.
2. Due cicli disgiunti commutano.

Proposizione 11.2.4. *1. Ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti.*

2. Ogni ciclo è prodotto di trasposizioni, in generale non disgiunte.

3. Ogni permutazione è prodotto di trasposizioni, in generale non disgiunte.

Dimostrazione. La 1. segue subito dalla definizione di ciclo.

Per dimostrare la 2. si ragiona per induzione sulla lunghezza $k \geq 2$ del ciclo: se $k = 2$ il ciclo è una trasposizione; supponiamo vera l'affermazione per cicli di lunghezza $k - 1$, e sia $\sigma = (n_1\ n_2\ \ldots\ n_k)$ un ciclo di lunghezza k. L'osservazione cruciale è che σ si può scrivere come prodotto di un $(k-1)$-ciclo τ e di una trasposizione ρ, nella forma $\sigma = \tau\rho = (n_1\ n_2\ \ldots\ n_{k-1})(n_k\ n_1)$. Per vederlo meglio scriviamo per esteso come operano queste permutazioni, gli elementi non indicati rimangono fissi:

$$\tau\rho = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \ldots & n_{k-2} & n_{k-1} & n_k \\ n_2 & n_3 & \ldots & n_{k-1} & n_1 & n_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_k \\ n_k & n_1 \end{pmatrix}.$$

Quindi concludiamo usando l'ipotesi induttiva.

La 3. segue dalle precedenti. □

11.3 Segno di una permutazione e gruppo alternante

L'espressione di una permutazione come prodotto di trasposizioni non è unica. Introdurremo ora la nozione di inversione, che permetterà di associare a ogni permutazione un segno.

Definizione 11.3.1. Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ una permutazione. **Un'inversione di** σ è una coppia di indici $i < j$ compresi fra 1 e n tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Per esempio il ciclo $\sigma = (1\ 2)$ ha una inversione, in quanto $1 < 2$ ma $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(2)$. Il ciclo $\tau = (1\ 2\ 3)$ ha due inversioni: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; le coppie da considerare sono 3 e precisamente:

$1 < 2$ e $\sigma(1) = 2 < 3 = \sigma(2)$; $1 < 3$ ma $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(3)$; $2 < 3$ ma $\sigma(2) = 3 > 1 = \sigma(3)$.

Definizione 11.3.2. Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ una permutazione. **Il segno di** σ è $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^a$, dove a è il numero di inversioni di σ, ossia

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ è pari;} \\ -1 & \text{se } a \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Una permutazione è detta pari se ha segno 1, dispari se ha segno -1. Le permutazioni pari sono quelle che presentano un numero pari di inversioni, mentre le permutazioni dispari presentano un numero dispari di inversioni.

Proposizione 11.3.3. *Ogni trasposizione ha segno -1, cioè è dispari.*

Dimostrazione. Sia $\sigma = (n_1\ n_2)$ una trasposizione. Scriviamo σ per esteso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n_1-1 & n_1 & n_1+1 & \dots & n_2-1 & n_2 & n_2+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n_1-1 & n_2 & n_1+1 & \dots & n_2-1 & n_1 & n_2+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Se $i < j$ è un'inversione di σ, notiamo subito che nessuno fra i e j può essere compreso fra 1 e $n_1 - 1$ nè fra $n_2 + 1$ e n. Invece per ogni n_k con $n_1 < n_k < n_2$, n_k compare in due inversioni: $\sigma(n_1) = n_2 > \sigma(n_k) = n_k$; $\sigma(n_k) = n_k > \sigma(n_2) = n_1$. Infine $n_1 < n_2$ ma $\sigma(n_1) = n_2 > \sigma(n_2) = n_1$. Quindi complessivamente c'è un numero dispari di inversioni e $\operatorname{sgn}\sigma = -1$. □

Il prossimo teorema viene enunciato senza dimostrazione.

Teorema 11.3.4. *Date due permutazioni $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$, si ha $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$. Quindi l'applicazione $\operatorname{sgn} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$, dove $\{-1, 1\}$ è il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}$, conserva il prodotto, ed è dunque un omomorfismo di gruppi.*

La dimostrazione segue da un lemma che afferma che $\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

Corollario 11.3.5. *1. Se $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ è un prodotto di k trasposizioni, allora $\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(\tau_i) = (-1)^k$.*

2. Se σ è un k-ciclo, allora $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{k-1}$.

3. Le permutazioni σ e σ^{-1} hanno lo stesso segno.

Dimostrazione. La 1. segue immediatamente dalla Proposizione 11.3.3 e dal Teorema 11.3.4. Per dimostrare la 2. procediamo per induzione su $k \geq 2$. Se $k = 2$, un 2-ciclo è una trasposizione e ha dunque segno -1 per la Proposizione 11.3.3. Supponiamo vera la tesi per i $(k-1)$-cicli e consideriamo un k-ciclo $\sigma = (n_1, \dots, n_k)$. Come nella dimostrazione della Proposizione 11.2.4, σ si scrive come prodotto di un $(k-1)$-ciclo τ e di una trasposizione ρ. Dunque per ipotesi induttiva $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-2}(-1) = (-1)^{k-1}$. Per la 3., notiamo che $\operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}_{I_n}) = 1 = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$. □

Per esempio, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5)(2\ 4)$ è prodotto di due trasposizioni, dunque $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1$.

Il Corollario 11.3.5 permette di trovare facilmente il segno di una permutazione: la si decompone come prodotto di cicli disgiunti e poi si applica la parte 2 del Corollario 11.3.5.

Definizione 11.3.6. Sia $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \text{ è pari}\}$: è un sottogruppo di $\mathcal{S}_n$, detto **sottogruppo alternante** di $\mathcal{S}_n$, o semplicemente **gruppo alternante**.

Infatti dal Teorema 11.3.4 segue che $\mathcal{A}_n$ è chiuso rispetto al prodotto e che se σ è pari anche σ^{-1} lo è. Inoltre ovviamente la permutazione identica è pari.

Invece l'insieme delle permutazioni dispari non è chiuso rispetto al prodotto: il prodotto di due permutazioni dispari è pari, mentre il prodotto di una pari e una dispari è dispari.

Osservazione 19. Se τ è una permutazione dispari fissata, l'insieme $\tau\mathcal{A}_n = \{\tau\sigma \mid \sigma \in \mathcal{A}_n\}$ coincide con l'insieme di **tutte** le permutazioni dispari. Infatti se α è una qualunque permutazione dispari, la si può scrivere nella forma $\alpha = \tau(\tau^{-1}\alpha)$, dove chiaramente $\tau^{-1}\alpha$ è pari. Osserviamo che di conseguenza l'insieme delle permutazioni dispari è in biiezione con $\mathcal{A}_n$, tramite l'applicazione $\mathcal{A}_n \to \tau\mathcal{A}_n$, tale che $\sigma \to \tau\sigma$.

Quindi $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \cup \tau\mathcal{A}_n$ e i due sottinsiemi sono fra loro in biiezione, dunque hanno lo stesso numero di elementi $\frac{n!}{2}$.

Esempio 11.3.7.

$$\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{id}_{I_3}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \supset \mathcal{A}_3 = \{\mathrm{id}_{I_3}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} :$$

$\mathcal{A}_3$ è un gruppo abeliano con 3 elementi.

Elenchiamo ora i 24 elementi di $\mathcal{S}_4$. Le permutazioni dispari sono le trasposizioni e i 4-cicli:

$$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3)(1\ 4\ 3\ 2).$$

Scriviamo ora gli elementi di $\mathcal{A}_4$:

$$\mathrm{id}_{I_4}, (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,2\,4), (1\,4\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3);$$

vi sono dunque, oltre alla permutazione identica, i 3-cicli e i prodotti di 2 2-cicli disgiunti.

11.4 Funzioni determinante

Iniziamo con un esempio. Consideriamo una matrice quadrata di ordine 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; per definizione il determinante di A è $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Come si è visto nel Foglio 2, Es. 1, $\det(A) \neq 0$ se e solo se le righe di A sono linearmente indipendenti, che equivale a dire che il rango di A è 2 o che A è invertibile. Possiamo interpretare det come un'applicazione che associa alla coppia delle righe di una matrice A lo scalare $\det(A)$, ossia come una funzione di due "variabili", che sono vettori di K^2. Questa funzione det è lineare rispetto a ogni riga ed è nulla se e solo se le righe sono linearmente dipendenti.

Generalizzeremo questo esempio, definendo che cosa si intende per una funzione determinante su uno spazio vettoriale V.

Definizione 11.4.1. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione n. Fissiamo un intero $k \geq 1$. Un'applicazione

$$D : V \times \cdots \times V = V^k \to K$$

è detta **multilineare o k-lineare** se è lineare in ogni argomento, cioè se per ogni $i = 1, \ldots, k$ si ha

$$D(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu v_i', v_{i+1} \ldots, v_k) = \lambda D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \mu D(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k).$$

D è detta **alternante** se $D(v_1, \ldots, v_k) = 0$ ogni volta che due degli argomenti sono uguali, ossia esistono indici $i \neq j$ tali che $v_i = v_j$.

Definizione 11.4.2. Una funzione determinante su V, K-spazio vettoriale di dimensione n, è un'applicazione multilineare alternante $D : V^n \to K$: in questo caso il dominio è la potenza n-esima di V dove $n = \dim V$.

Proposizione 11.4.3. *Sia D una funzione determinante su V. Allora:*

1. *D è* **antisimmetrica***: $D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -D(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i \dots, v_n)$: se scambiamo due degli argomenti la funzione cambia segno;*

2. *se $\sigma \in \mathcal{S}_n$, allora $D(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn} \sigma \ D(v_1, \dots, v_n)$;*

3. *se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $D(v_1, \dots, v_n) = 0$. In particolare se uno degli argomenti $v_i = 0$, allora $D(v_1, \dots, v_n) = 0$.*

Dimostrazione. 1. Consideriamo $D(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) = 0$ perchè D è alternante. Per la multilinearità questo coincide con

$$D(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots) + D(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + D(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) + D(\dots, v_j \dots, v_j, \dots) =$$

$$\text{per l'alternanza} = D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + D(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0.$$

2. Se σ è una trasposizione ha segno -1 e la proprietà segue dal punto 1. Altrimenti applichiamo la Proposizione 11.2.4 e il Corollario 11.3.5: se σ è un prodotto di k trasposizioni il suo segno è $(-1)^k$; ogni volta che operiamo con una trasposizione sugli argomenti, D cambia segno, dunque alla fine avremo la tesi.

3. Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, uno di loro è combinazione lineare dei rimanenti (Proposizione 2.6.2). Supponiamo per semplicità che sia v_n: $v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$. Allora

$$\begin{aligned} D(v_1, \dots, v_n) &= D(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i D(v_1, \dots, v_{n-1}, v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i 0 = 0 \end{aligned}$$

perchè D è alternante. □

Esempio 11.4.4. Un esempio banale di funzione determinante è la funzione identicamente nulla: $D(v_1, \dots, v_n) = 0$ per ogni scelta di $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$.

11.5 Formula di Leibniz per i determinanti

Fissiamo una funzione determinante su V e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V. Per n vettori $w_1, \dots, w_n \in V$, vogliamo esprimere $D(w_1, \dots, w_n)$ in termini delle loro coordinate rispetto a $\mathcal{B}$. Scriviamo dunque ogni w_i come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ nella forma

$w_i = \sum_{j_i=1}^n x_{ij_i} v_{j_i}$. Abbiamo bisogno di usare indici diversi per ogni vettore perchè ora li faremo variare tutti n contemporaneamente:

$$\begin{aligned} D(w_1, \dots, w_n) &= D(\sum_{j_1=1}^n x_{1j_1} v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2j_2} v_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n x_{nj_n} v_{j_n}) = \text{multilinearità I argomento} \\ &= \sum_{j_1=1}^n x_{1j_1} D(v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2j_2} v_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n x_{nj_n} v_{j_n}) = \text{multilin. per gli altri} \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{nj_n} D(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}). \end{aligned}$$

Ma $D(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ può essere $\neq 0$ soltanto se gli indici $j_1, \dots, j_n$ sono tutti diversi, cioè se formano una permutazione di $1, \dots, n$. Quindi possiamo riscrivere così:

$$\begin{aligned} D(w_1, \dots, w_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)} D(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)} D(v_1, \dots, v_n). \end{aligned} \tag{11.1}$$

L'espressione (11.1) è nota come **formula di Leibniz per il determinante**. È una somma con $n!$ addendi quindi è utilizzabile solo per n piccolo. Come conseguenza della formula di Leibniz, abbiamo il seguente corollario.

Corollario 11.5.1. *Sia D una funzione determinante non nulla su V. Allora $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V se e solo se $D(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.*

Dimostrazione. Se $v_1, \dots, v_n$ non formano una base, sono linearmente dipendenti, dunque $D(v_1, \dots, v_n) = 0$ per la Proposizione 11.4.3. Viceversa: essendo $D \neq 0$ esistono n vettori $w_1, \dots, w_n$ tali che $D(w_1, \dots, w_n) \neq 0$. Allora se $v_1, \dots, v_n$ formano una base, applicando la (11.1) otteniamo che dev'essere $D(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. □

Il seguente teorema, molto importante, ci dà l'unicità della funzione determinante a meno di costanti.

Teorema 11.5.2. *Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione n, $(v_1, \dots, v_n)$ una base di V. Allora esiste una e una sola funzione determinante su V, $D : V^n \to K$, tale che $D(v_1, \dots, v_n) = 1$. Ogni altra funzione determinante è del tipo λD, con $\lambda \in K$.*

Dimostrazione. Come si fa usualmente, dimostriamo prima l'unicità e poi l'esistenza. Supponendo che esista una funzione determinante D tale che $D(v_1, \dots, v_n) = 1$, la formula di Leibniz (11.1) ci dà che, presi n vettori $w_i = \sum_j x_{ij} v_j$, dev'essere

$$D(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)}, \tag{11.2}$$

e perciò abbiamo l'unicità. Dobbiamo dunque dimostrare che, prendendo la (11.2) come definizione di D, otteniamo una funzione multilineare alternante tale che $D(v_1, \dots, v_n) = 1$.

Per l'ultima affermazione osserviamo che $v_i = \sum_j \delta_{ij} v_j$ e quindi dalla (11.2) otteniamo $D(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \delta_{1\sigma(1)} \ldots \delta_{n\sigma(n)} = 1$, perchè rimane un unico addendo corrispondente alla permutazione identica.

Verifichiamo che D è multilineare:

$$\begin{aligned} D(w_1, \ldots, \lambda w_i + \mu w_i', \ldots, w_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda x_{i\sigma(i)} + \mu x'_{i\sigma(i)}) \ldots x_{n\sigma(n)} = \\ &= \lambda D(w_1, \ldots, w_i, \ldots w_n) + \mu D(w_1, \ldots, w_i', \ldots w_n). \end{aligned}$$

Verifichiamo infine che D è alternante; consideriamo vettori $w_1, \ldots, w_n$ con $w_i = w_j$ dove i, j sono due indici diversi. Ciò significa che $x_{ik} = x_{jk}$ per ogni indice k. Sia $\tau = (i\ j)$ la trasposizione che scambia proprio gli indici i e j. Allora $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \cup \tau \mathcal{A}_n$ (Osservazione 19). Quindi

$$\begin{aligned} D(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_j, \ldots, w_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} x_{1\sigma(\tau(1))} \cdots x_{n\sigma(\tau(n))}. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} x_{1\sigma(\tau(1))} \cdots x_{i\sigma(\tau(i))} \cdots x_{j\sigma(\tau(j))} \cdots x_{n\sigma(\tau(n))} &= \text{per definizione di } \tau \\ = x_{1\sigma(1)} \cdots x_{i\sigma(j)} \cdots x_{j\sigma(i)} \cdots x_{n\sigma(n)} &= \text{per l'ipotesi che } w_i = w_j \\ = x_{1\sigma(1)} \cdots x_{j\sigma(j)} \cdots x_{i\sigma(i)} \cdots x_{n\sigma(n)}, & \end{aligned}$$

quindi la somma è nulla. □

11.6 Determinante di una matrice

Consideriamo ora il caso in cui $V = K^n$ in cui è fissata la base canonica $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$. Il determinante standard, denotato det, è l'unica funzione determinante

$$\det : K^n \times \cdots \times K^n = (K^n)^n \to K$$

tale che $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$. In questo caso il dominio $(K^n)^n$ si interpreta come spazio delle matrici quadrate di ordine n, ossia se $(w_1, \ldots, w_n) \in K^n \times \cdots \times K^n$ le n-uple $w_1, \ldots, w_n$ sono pensate come le n **righe** di una matrice $n \times n$. Quindi $\det(E_n) = \det(e_1, \ldots, e_n) = 1$: è il determinante della matrice identica E_n.

Se $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ è una matrice $n \times n$, useremo la notazione

$$\det(A) = \det(\underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\text{righe di } A}) = \mid A \mid .$$

Esempio 11.6.1 (Determinante delle matrici di ordine 2 e 3)**.**
Se A è una matrice di ordine 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, per la regola di Leibniz si ha:

$$\det(A) = \det((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})) = \underbrace{a_{11} a_{22}}_{\sigma = \mathrm{id}_{I_2}} - \underbrace{a_{12} a_{21}}_{\sigma = (1\ 2)} .$$

Se A è una matrice di ordine 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, lo sviluppo del suo determinante secondo la regola di Leibniz contiene 6 addendi, corrispondenti alle 6 permutazioni di $\mathcal{S}_3$ (Esempio 11.3.7):

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}_{\sigma=(2\ 3)} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{\sigma=(1\ 2\ 3)} - \underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}_{\sigma=(1\ 2)} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{\sigma=(1\ 3\ 2)} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{\sigma=(1\ 3)}.$$

La **regola di Sarrus** è un trucco per scrivere velocemente il determinante di una matrice 3×3 (*solo matrici* 3×3). Riscriviamo la matrice A, ripetendo poi le prime due colonne ed evidenziando tre diagonali:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \color{red}{a_{11}} & \color{green}{a_{12}} & \color{blue}{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \color{green}{a_{23}} & \color{blue}{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} & \color{green}{a_{31}} & \color{blue}{a_{32}} \end{array}\right)$$

I primi tre addendi di $\det(A)$ sono i tre prodotti degli elementi sulle tre diagonali evidenziate: $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$. Ora dobbiamo invece sottrarre i tre prodotti degli elementi contenuti nelle tre diagonali secondarie evidenziate di seguito:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & \color{red}{a_{13}} & \color{green}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \color{green}{a_{23}} & \color{blue}{a_{21}} & a_{22} \\ \color{red}{a_{31}} & \color{green}{a_{32}} & \color{blue}{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

Si ottiene: $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$. Confrontando con l'Esempio 11.6.1, si vede che quello che si trova è proprio il determinante della matrice considerata.

Proposizione 11.6.2. *Sia A una matrice quadrata $n \times n$, e sia ${}^tA$ la sua trasposta. Allora $\det(A) = \det({}^tA)$.*

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, ${}^tA = (a'_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con $a'_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici. Si ha:

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \text{cambiando eventualmente l'ordine} \\ &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \\ &= \det(A) \quad \text{perchè } \sigma^{-1} \text{ descrive tutto } \mathcal{S}_n. \end{aligned}$$

□

Osservazione 20. Come conseguenza osserviamo che il determinante è una funzione multilineare alternante anche sulle colonne di A.

11.7 Comportamento di un determinante per trasformazioni elementari

Vediamo ora come cambia il determinante di una matrice A se si opera con trasformazioni elementari sulle righe. Scriviamo la matrice mettendo in evidenza le sue righe.

I tipo: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \stackrel{I}{\to} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; per la multilinearità $\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$: **il determinante viene moltiplicato per** λ;

II tipo: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \stackrel{II}{\to} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; di nuovo per la multilinearità $det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, ma il secondo determinante contiene due righe uguali, ed è perciò nullo; **una trasformazione elementare del II tipo lascia il determinante invariato**;

III tipo: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \stackrel{III}{\to} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; per la multilinearità $det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, quindi anche **una trasformazione elementare del III tipo lascia il determinante invariato**;

IV tipo: due righe della matrice vengono scambiate, perciò **in una trasformazione elementare del IV tipo il determinante cambia segno**.

Segue subito il seguente Corollario.

Corollario 11.7.1. *Se A è una matrice quadrata di ordine n e λ è uno scalare, allora $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$. In particolare $det(-A) = (-1)^n det(A)$.*

Quanto abbiamo appena osservato riguardo alla trasformazioni elementari potrà essere applicato al calcolo di determinanti, alla luce della seguente proposizione.

Proposizione 11.7.2. *Sia A una matrice triangolare superiore, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con $a_{ij} = 0$ per ogni coppia di indici tali che $i > j$:* $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. *Allora $det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$: è il prodotto degli elementi che stanno sulla diagonale principale.*

Dimostrazione. $\det(A) = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$; osserviamo che se $\sigma \neq \mathrm{id}_{I_n}$ c'è almeno un indice i tale che $i > \sigma(i)$.

Per l'ipotesi che A sia triangolare superiore, questo implica che nel prodotto $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ c'è almeno un fattore nullo, e quindi in $\det(A)$ rimane solo l'addendo corrispondente a id_{In}. □

La stessa proprietà vale anche per le matrici triangolari inferiori (con lo stesso ragionamento).

Allora per calcolare il determinante di una matrice A, possiamo trasformarla in una matrice a gradini con trasformazioni elementari, tenendo conto del fatto che quelle del II e III tipo lasciano il determinante invariato, quelle del IV tipo fanno cambiar segno al determinante, quelle del I tipo lo moltiplicano per uno scalare. Il risultato è una matrice triangolare superiore.

Esempio 11.7.3. Presentiamo un esempio di una matrice 4×4; lo sviluppo del suo determinante secondo la regola di Leibniz contiene $4! = 24$ addendi; con l'algoritmo appena esposto il calcolo è molto più rapido.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{scambio due righe} = - \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{III tipo} = - \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\text{IV e I tipo} = 2 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{III tipo} = 2 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{I tipo} =$$

$$= -4 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{III tipo} = -4 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = -4.$$

Abbiamo visto nel Corollario 11.5.1 che una funzione determinante non nulla, definita su V, non si annulla su vettori $v_1, \dots, v_n$ se e solo se questi formano una base. Ne segue:

Proposizione 11.7.4. *Sia A una matrice quadrata. Allora det*$(A) = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \neq 0$ *se e solo se le righe di A formano una base di K^n, se e solo se A è invertibile.*

Proposizione 11.7.5. *Sia* $A = \begin{pmatrix} B & | & * \\ --- & | & --- \\ 0 & | & C \end{pmatrix}$ *una matrice a blocchi, con B, C matrici quadrate. Allora det*$(A) =$ *det*(B)*det*(C).

Dimostrazione. Lo si dimostra con trasformazioni elementari, trasformando B e C in matrici triangolari superiori senza moltiplicare nessuna riga per uno scalare, ma operando solo con trasformazioni elementari di II, III e IV tipo. Prima si passa da B a B' triangolare con trasformazioni elementari che comprendono k scambi di righe, lavorando solo sulle righe di B; poi si passa da C a C' triangolare, con trasformazioni elementari sulle righe di C, con l scambi di righe: $A \to \begin{pmatrix} B' & | & * \\ --- & | & --- \\ 0 & | & C' \end{pmatrix} = A'$. Allora $\det(A') =$ triangolare $= \det(B')\det(C') = (-1)^k\det(B)(-1)^l\det(C) = (-1)^{k+l}\det(A)$. Si conclude che $\det(A) = \det(B)\det(C)$. □

11.8 Teorema di Binet

La dimostrazione di questo importante teorema, di enunciato molto semplice, si basa sulla teoria dei determinanti che abbiamo costruito.

Teorema 11.8.1. *Siano A, B matrici quadrate $n \times n$ su K. Allora det*$(AB) =$ *det*(A)*det*(B)*. In particolare l'applicazione det : $GL(n, K) \to K \setminus \{0\}$ è un omomorfismo di gruppi (moltiplicativi).*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso particolare in cui $\det(B) = 0$: allora le righe di B sono linearmente dipendenti, quindi il sistema lineare omogeneo $BX = 0$ ha soluzioni non nulle: esiste $v \neq 0$, $v \in K^n$, tale che $Bv = 0$. Allora anche $(AB)v = A(Bv) = A0 = 0$: ciò significa che anche il sistema lineare omogeneo $(AB)X = 0$ ha una soluzione non nulla, dunque AB ha rango $< n$, e quindi $\det(AB) = 0$.

Sia ora $\det(B) \neq 0$. Consideriamo l'applicazione

$$f_B : M(n \times n, K) \to K$$

definita da $f_B(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$. Vogliamo dimostrare che $f_B(A) = \det(A)$. Per il Teorema 11.5.2 basta dimostrare che:

1. f_B è multilineare e alternante nelle righe di A;
2. $f_B(E_n) = 1$.

La 2. è immediata: $f_B(E_n) = \frac{\det(E_nB)}{\det(B)} = 1$. Per dimostrare la 1. consideriamo una matrice A con $a_j = \lambda a'_j + \mu a''_j$; allora al posto d'indici jk di AB abbiamo $a_j b^k = (\lambda a'_j + \mu a''_j)b^k = \lambda(a'_j b^k) + \mu(a''_j b^k)$; perciò la riga j-esima di AB è una combinazione lineare di due righe. Ma il determinante è lineare nella j-esima componente, perciò $\det(AB) = \lambda\det(A'B) + \mu(A''B)$, dove A' è ottenuta da A sostituendo la riga a_j con a'_j, e similmente A''. Quindi $f_B(A) = \lambda f_B(A') + \mu f_B(A'')$. Inoltre: se A ha due righe uguali, anche AB ha due righe uguali, e quindi $\det(AB) = 0$, che implica $f_B(AB) = 0$.

Concludiamo così che $\det(A) = f_B(A)$. □

Corollario 11.8.2. *Sia A una matrice quadrata invertibile. Allora det$(A^{-1}) = (detA)^{-1}$.*

Dimostrazione. $AA^{-1} = E_n$; allora per il Teorema di Binet 11.8.1, $\det(AA^{-1}) = 1 = \det(A)\det(A^{-1})$. □

Corollario 11.8.3. *Se A, B sono matrici quadrate simili, allora det(A) = det(B).*

Dimostrazione. Da $B = S^{-1}AS$ segue $\det(B) = \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) =$ per il Corollario precedente $= \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A)$. □

Il Corollario 11.8.3 permette di dare la definizione di determinante di un endomorfismo.

Definizione 11.8.4. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di un K-spazio vettoriale V di dimensione finita. Si definisce il **determinante di** f ponendo $\det(f) = \det M_{\mathcal{B}}(f)$, qualunque sia la base $\mathcal{B}$ di V considerata.

La definizione è ben posta perchè se si prende un'altra base $\mathcal{B}'$ di V, le matrici $M_{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B}'}$ di f sono simili (Sezione 10.4) e hanno perciò lo stesso determinante. Con questa definizione, abbiamo che f è un isomorfismo di V in sè se e solo se $\det(f) \neq 0$.

11.9 Matrice aggiunta

Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ una matrice $n \times n$. Per ogni i, j denotiamo A'_{ij} la seguente matrice $n \times n$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{i-1,1}} & & \phantom{a_{i-1,j-1}} & \overset{j}{\downarrow} & \phantom{a_{i-1,j+1}} & & \phantom{a_{i-1,n}} \end{array} \\ i \to & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & \vert\ 0\ \vert & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vert\ \vdots\ \vert & & & \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & \vert\ 0\ \vert & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & \vert\ 0\ \vert & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vert\ \vdots\ \vert & & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & \vert\ 0\ \vert & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{11.3}$$

Abbiamo sostituito all'i-esima riga e_j e alla j-esima colonna e_i. Osserviamo che, se procediamo con trasformazioni elementari del III tipo su A'_{ij} come segue: alla I riga sommiamo la riga i-esima moltiplicata per a_{1j}, alla II riga sommiamo la riga i-esima moltiplicata per a_{2j}, e così via, lasciando invariata soltanto la riga i-esima, otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ e_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Il determinante non è cambiato.

Definizione 11.9.1. La matrice $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{ij=1,\dots,n}$, dove $\widetilde{a}_{ij} :=\mid A'_{ji} \mid$, è detta **matrice aggiunta di** A.

Notiamo che gli indici sono scambiati, dunque $\widetilde{A} = {}^t(\mid A'_{ij} \mid)_{i,j=1,\dots,n}$.

Teorema 11.9.2. *Sia A una matrice quadrata. Si ha $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = det(A)E_n$.*

Dimostrazione. Denotiamo con b_{ik} l'elemento di $A\widetilde{A}$ di indici ik. Si ha:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mid A'_{kj} \mid = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ e_j \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

L'ultima uguaglianza segue dalla linearità del determinante rispetto al k-esimo argomento. Ma $\sum_j a_{ij}e_j = a_i$: è la riga i-esima di A che ora va nella posizione k-esima. Quindi si trova:

$$b_{ik} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_i \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ \det(A) & \text{se } i = k \end{cases} = \det(A)\delta_{ik}.$$

Perciò $A\widetilde{A} = \det(A)E_n$. Per calcolare $\widetilde{A}A$ si lavora in maniera analoga sulle colonne, ricordando che il determinante è multilineare alternante anche sulle colonne della matrice (Osservazione 20). □

Corollario 11.9.3 (Formula per l'inversa di una matrice)**.** *Se A è una matrice quadrata invertibile, si ha*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\widetilde{A}.$$

Notiamo che si tratta di una formula che dà direttamente l'espressione dell'inversa di una matrice, da distinguersi dall'algoritmo della Sezione 10.5.

Esempio 11.9.4. Sia A una matrice 2×2. Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ allora}$$

$$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}, \ \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}, \ \widetilde{a}_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{21}, \ \widetilde{a}_{12} = -a_{12}.$$

Dunque

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

11.10 Sviluppo di Laplace di un determinante

Data una matrice quadrata A $n \times n$, denotiamo con A_{ij} la sua sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima di A. A_{ij} è detta sottomatrice complementare dell'elemento a_{ij} di A e il suo determinante **minore complementare di** a_{ij}.

Confrontiamo il determinante della matrice A_{ij} con quello della matrice A'_{ij} definita nella Sezione 11.9.

Proposizione 11.10.1. *Si ha* $det(A'_{ij}) = \widetilde{a}_{ji} = (-1)^{i+j} det(A_{ij}$.

Dimostrazione. Infatti da A'_{ij} con $i-1$ scambi di righe e $j-1$ scambi di colonne passiamo alla matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

che ha lo stesso determinante di A_{ij}. Otteniamo quindi l'espressione voluta perchè $(i-1)+(j-1)$ ha la stessa parità di $i+j$. $\square$

Definizione 11.10.2. L'elemento $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ è detto **complemento algebrico o cofattore dell'elemento** a_{ij} di A.

Teorema 11.10.3 (I Teorema di Laplace per lo sviluppo di un determinante)**.**
Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ *una matrice* $n \times n$.
1. Sia i *un indice di riga fissato. Allora*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}),$$

ogni addendo è prodotto dell'elemento a_{ij} *per il suo complemento algebrico. Questo è detto sviluppo di* $det(A)$ *seconda la riga* i*-esima.*

2. Sia j un indice di colonna fissato. Allora

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}),$$

anche qui ogni addendo è prodotto dell'elemento a_{ij} per il suo complemento algebrico. Questo è detto sviluppo di $det(A)$ seconda la colonna j-esima.

Dimostrazione. Sappiamo che $A\widetilde{A} = (b_{ij})_{i,j} = \det(A)E_n$. Allora per ogni i

$$b_{ii} = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a}_{ji} = \sum_{j} a_{ij} \mid A'_{ij} \mid = \sum_{j} (-1)^{i+j} a_{ij} \mid A_{ij} \mid .$$

Se si considera $\widetilde{A}A$ si ottiene l'analoga espressione per le colonne. □

Esempio 11.10.4. 1. Consideriamo il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{sviluppiamo secondo la terza riga e otteniamo} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -3 + 6 = 3.$$

2. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$: lo sviluppiamo secondo la seconda colonna $= -3 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

sviluppiamo secondo la terza riga: $= -3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -3(8 - 42) = 102.$

3. Risoluzione dei sistemi lineari omogenei di due equazioni in tre incognite.
Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \end{cases} \text{avente come matrice} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

Tale sistema ha la seguente soluzione $\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$.

Per vederlo, considerare lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga dei seguenti determinanti con due righe uguali:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Una proprietà analoga vale per i sistemi lineari di $n - 1$ equazioni in n incognite.

Osservazione 21. Come conseguenza del Teorema di Laplace 11.10.3, si ha che, se si fissano due indici di riga diversi $i \neq k$, allora

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{kj}) = 0, \tag{11.4}$$

ossia se si sommano i prodotti degli elementi di una riga per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga, si ottiene 0. In effetti la (11.4) si può pensare come lo sviluppo di Laplace del determinante di una matrice con due righe uguali, cioè la matrice ottenuta sostituendo in A alla riga k-esima la riga i-esima. Questo è talvolta citato come **II Teorema di Laplace.**

La proprietà analoga vale anche per le colonne.

11.11 Teorema di Cramer

Consideriamo un sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice dei coefficienti A ha rango massimo n. Equivalentemente A è invertibile, o ha determinante non nullo; si dice anche che A è non singolare o non degenere. In tal caso il sistema ha una e una sola soluzione qualunque sia la colonna dei termini noti (Sezione 5.7). Il Teorema di Cramer fornisce una formula esplicita per l'unica soluzione.

Teorema 11.11.1. *Sia A una matrice $n \times n$ invertibile a coefficienti in K, siano $a^1, \dots, a^n$ le sue colonne e sia $Ax = b$ un sistema lineare con $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$. Allora l'unica soluzione del sistema è la n-upla $(y_1, \dots, y_n)$ di coordinate*

$$y_j = \frac{det(a^1, \cdots, a^{j-1}, b,\ a^{j+1}, \cdots, a^n)}{det(A)}$$

per ogni $j = 1, \dots, n$: è un quoziente di due determinanti, a denominatore quello di A, a numeratore quello della matrice ottenuta sostituendo alla colonna j-esima di A la colonna dei termini noti.

Dimostrazione. Sia $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la soluzione. Allora $Ay = b$; ciò equivale a

$$y_1a^1 + y_2a^2 + \cdots + y_na^n = b.$$

Perciò $\det(a^1, \cdots, a^{j-1}, b,\ a^{j+1}, \cdots, a^n) = \det(a^1, \cdots, a^{j-1},\ y_1a^1 + y_2a^2 + \cdots + y_na^n,\ a^{j+1}, \cdots, a^n) =$ per la multilinearità $= \sum_{i=1}^{n} y_i\ \det(a^1, \cdots, a^{j-1}, a^i,\ a^{j+1}, \cdots, a^n) = y_j\det(A)$. Essendo $\det(A) \neq 0$, possiamo dividere per $\det(A)$ e otteniamo la tesi. $\square$

Osserviamo che l'unica soluzione è anche esprimibile come $y = A^{-1}b$.

11.12 Rango e minori di una matrice

Definizione 11.12.1. I minori di una matrice sono i determinanti delle sue sottomatrici quadrate. Si dice che un minore ha ordine s se è il determinante di una sottomatrice $s \times s$.

Vale la seguente caratterizzazione del rango di una matrice.

Proposizione 11.12.2. *Sia $A \in M(m \times n, K)$ una matrice $m \times n$. Allora A ha rango r se e solo se A ha almeno un minore non nullo di ordine r e ogni minore di A di ordine $s > r$ è nullo. Equivalentemente, il rango di A è il massimo ordine di un minore non nullo di A.*

Dimostrazione. Se A ha rango r, A contiene r righe linearmente indipendenti; possiamo supporre che siano $a_1, \cdots, a_r$. Allora la sottomatrice $A' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$ formata dalle prime r righe di A è una matrice $r \times n$ di rango r. Quindi A' ha r colonne linearmente indipendenti: questo ci dà una sottomatrice $r \times r$ invertibile di A. Dato che, per ipotesi, se $s > r$, s righe o colonne di A comunque prese sono linearmente dipendenti, ogni sottomatrice quadrata di ordine s ha righe e colonne linearmente dipendenti.

Viceversa, supponiamo che la sottomatrice formata dalla prime r righe e colonne di A sia invertibile; allora le prime r righe e colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi $\operatorname{rg} A \geq r$. Ma $\operatorname{rg} A$ non può essere $> r$ altrimenti per la precedente implicazione potrei trovare un minore non nullo di ordine $> r$. □

Si può dimostrare il seguente teorema di Kronecker, o degli orlati, che permette di semplificare il procedimento espresso dal Teorema 11.12.2. In una matrice A, considerata una sua sottomatrice quadrata B di ordine p con determinante diverso da zero, si definiscono **orlati di** B tutte le sottomatrici quadrate di ordine $p+1$, ottenute aggiungendo a B (parte di) una riga e una colonna di A. Il Teorema afferma che, se tutti gli orlati di B hanno determinante nullo, allora $\operatorname{rg} A = p$.

11.13 Il determinante come area o volume

Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 11.13.1. Il parallelepipedo generato da $v_1, \ldots, v_n$ è il sottinsieme di $\mathbb{R}^n$:

$$P(v_1, \ldots, v_n) := \{v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Per esempio, per $n = 1$ troviamo $P(v) = \{\lambda v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \mathbb{R}$: è il segmento corrispondente al vettore v. Per $n = 2$, troviamo il parallelogramma $P(v_1, v_2)$ avente i due vettori v_1, v_2 come lati. Se v_1, v_2 sono linearmente dipendenti, il parallelogramma è detto degenere, è il caso di due vettori paralleli.

Proposizione 11.13.2. *Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ vettori linearmente indipendenti. L'area di $P(v_1, v_2)$ è il valore assoluto del determinante dei due vettori: $| \det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} |$.*

Cenno di dimostrazione. Consideriamo il parallelogramma di lati v_1, v_2 come in figura. L'area è il prodotto "base $\times$ altezza". Modifichiamo ora v_1 senza cambiare tale area, sostituiamo cioè a v_1 un vettore $v_1' = v_1 + \lambda v_2$, dove λ è scelto in modo che $v_1 + \lambda v_2$ sia parallelo a e_1, primo vettore della base canonica, quindi $v_1' = ae_1 = (a, 0)$. Osserviamo che passando da $P(v_1, v_2)$ a $P(v_1', v_2)$ l'area non cambia perchè non cambia l'altezza perpendicolare a v_2.

Ripetiamo ora sostituendo a v_2 un vettore $v_2' = \mu v_1' + v_2$ con μ scelto in modo che v_2' risulti parallelo a e_2, quindi $v_2' = be_2 = (0, b)$. Questa volta non cambia l'altezza perpendicolare a v_1', dunque l'area è invariata.

Abbiamo ottenuto $v_1' = ae_1 = (a, 0)$, $v_2' = be_2 = (0, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$; sono i lati di un rettangolo di area $\mid a \mid\mid b \mid$. D'altra parte

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 + \lambda v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 + \mu v_1' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab.$$

□

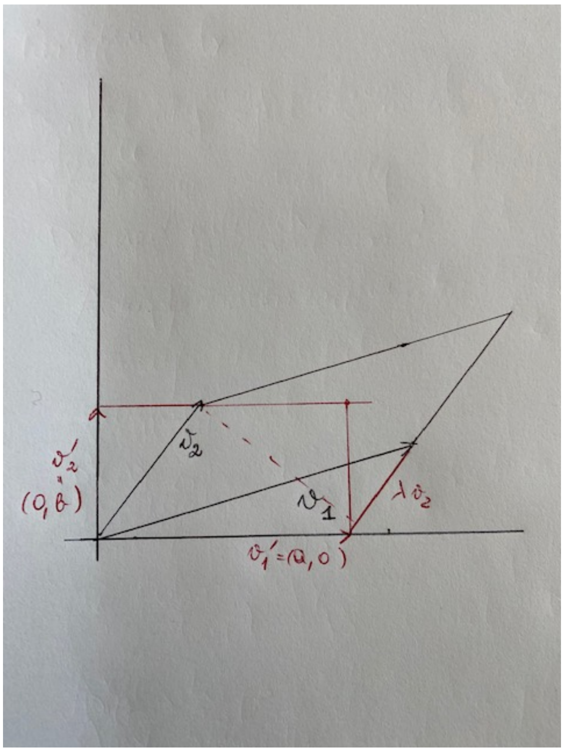

Figura 11.1: Parallelogramma di lati v_1, v_2 e rettangolo di lati v_1', v_2'

Questo ragionamento si estende a dimensione n qualunque: si definisce per induzione il volume del parallelepipedo $P(v_1, \ldots, v_n)$ come valore assoluto del determinante $\det(v_1, \ldots, v_n)$: è il prodotto del volume n-dimensionale di una base per la relativa altezza.

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un endomorfismo del tipo $f = L(A)$, dove A una matrice 2×2, e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ sono due vettori, si dimostra con un conto diretto che $\det(f(v_1), f(v_2)) = \det(A)\det(v_1, v_2)$. Dunque il determinante di A, che coincide con il determinante di f, misura il rapporto fra le aree dei due parallelogrammi, di lati v_1, v_2 e $f(v_1), f(v_2)$.