Diagonalizzazione

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $\dim V = n < \infty$.

Def Un endomorfismo è un'applicazione lineare $f : V \to V$. Poniamo $\mathrm{End}(V) \overset{def}{=} \mathrm{Hom}(V, V)$.

OSS $\mathrm{End}(V)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e
$$\dim \mathrm{End}(V) = (\dim V)^2.$$

Es Se $\dim = 1$ allora $\dim \mathrm{End}(V) = 1$

$u \in V - \{0\} \Rightarrow \{u\}$ base per V

$f(u) = \lambda u$, per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$

Se $v = \alpha u \in V$, $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow$
$$f(v) = \alpha f(u) = \alpha \lambda u = \lambda v.$$

Cioè ogni $f \in \mathrm{End}\, V$, $\dim V = 1$, è della forma $f(v) = \lambda v$ per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-sp. vett. con $\dim V = n$, e sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo. Una base $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ di V è detta <u>base diagonalizzante</u> per f se $M_{\mathcal{V}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice diagonale, cioè $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.
$$M_{\mathcal{V}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

OSS $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ è base di V diagonalizzante per $f: V \to V$ $\iff$ $f(v_i) = \lambda_i v_i$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sono le entrate della diagonale principale di $M_{\mathcal{V}}(f)$.

Pertanto per trovare una base diagonalizzante per f occorre risolvere l'equazione

$$f(v) = \lambda v, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{K},\ v \in V - \{0\}.$$

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $f \in End(V)$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto <u>autovalore</u> di f se esiste un vettore non nullo $v \in V$ t.c.

$$f(v) = \lambda v.$$

Un tale vettore v è detto <u>autovettore</u> di f relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$.

OSS 1) $v \in V - \{0_V\}$ è autovettore di $f \in End(V)$ $\iff$ esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

2) Il vettore nullo 0_V <u>non è mai</u> un autovettore.

3) Lo scalare nullo $0 \in \mathbb{K}$ <u>può</u> essere autovalore.

Teorema Sia $f \in End(V)$. Allora uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di f $\iff$ $\ker(f - \lambda\, id_V) \neq \{0_V\}$.

In tal caso $v \in V - \{0\}$ è autovettore di f relativo a λ $\iff$ $v \in \ker(f - \lambda\, id_V) - \{0_V\}$

Dim $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di f $\iff$ $\exists\, v \in V - \{0_V\}$ t.c. $f(v) = \lambda v$ $\iff$ $f(v) - \lambda v = 0_V$ $\iff$ $(f - \lambda\, id_V)(v) = 0_V$ $\iff$ $\underline{v \in \ker(f - \lambda\, id) - \{0_V\}}$.

Def Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di f. Il sottospazio vettoriale

$$\mathrm{Aut}(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \ker(f - \lambda\, id_V) \subset V$$

è detto <u>autospazio</u> di f relativo a λ.

Pertanto se λ è un autovalore di f, si ha

$$\dim \mathrm{Aut}(\lambda) \geq 1.$$

I vettori <u>non nulli</u> di $\mathrm{Aut}(\lambda)$ sono precisamente gli autovettori relativi a λ. $\mathrm{Aut}(\lambda)$ contiene anche il vettore nullo, essendo un sottospazio vett. di V.

Sia ora $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V. In generale $A = M_{\mathcal{V}}(f)$ è una matrice quadrata $n \times n$ arbitraria. Vorremo trovare, se possibile, una base diagonalizzante.

Def Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Il <u>polinomio caratteristico</u> di A è $p_A \overset{\text{def}}{=} \det(A - x I_n) \in \mathbb{K}[x]$.

<u>OSS</u> Il determinante si ottiene facendo somme di prodotti di entrate della matrice $\Rightarrow p_A$ è effettivamente un polinomio in x a coefficienti in $\mathbb{K}$. Se $A = (a_{ij})$

$$p_A = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} - x \end{pmatrix}$$

Il prodotto $(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ ha grado n mentre tutti gli altri prodotti che figurano nella formula di Leibniz del det hanno grado $< n$ $\Rightarrow$

p_A è un polinomio di grado n e il termine di grado massimo è $(-x)^n$

<u>Es</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow$

$$p_A = \begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) + 2 =$$

$$= x^2 - 4x + 5 .$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \rightsquigarrow p_B = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3-x) \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)(3-x) .$$

Teorema Sia $f \in End(V)$, con $\dim V = n$. Se $v = (v_1, \dots, v_n)$ è base per V e $A = M_v(f) \in M_n(\mathbb{K})$, allora $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \iff \lambda$ è radice del polinomio caratteristico di A, cioè $p_A(\lambda) = 0$. Inoltre $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V - \{0\}$ autovettore $\iff (A - \lambda I_n) X = 0$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{K}^n}$

<u>Dim</u> λ è autovalore di $f \iff \ker(f - \lambda\, id_V) \neq \{0_V\}$

$\iff rg(f - \lambda\, id_V) = rg\, M_v(f - \lambda\, id_V) < n$.

Si ha: $M_v(f - \lambda\, id_V) = A - \lambda I_n$ e

$rg(A - \lambda I_n) < n \iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff$

$p_A(\lambda) = 0$. $v \in V$ è autovettore $\iff (f - \lambda\, id_V)(v) = 0_V$

$\iff$ le sue coordinate nella base v soddisfano $(A - \lambda I_n) X = 0$

e $X \neq 0$.

Def Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Gli autovalori, autovettori e autospazi di $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ si chiamano risp. autovalori, autovettori e autospazi di A.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ $\quad p_A = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} =$

$= (1-x)(-1-x) - 1 = x^2 - 2$

Gli autovalori di A sono quindi le soluzioni di

$$x^2 - 2 = 0$$

$\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$.

Cerchiamo gli autovettori: dobbiamo risolvere il sistema $(A - \lambda I_2)X = 0$, $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$

$\lambda_1)$ $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

la 2ª riga è multiplo della prima e può essere scartata $\quad (1+\sqrt{2})x + y = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ è base per lo spazio delle soluzioni

$\mathrm{Aut}(-\sqrt{2}) = \mathrm{span}(v_1)$

$\lambda_2)$ $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad (1-\sqrt{2})x + y = 0$

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Aut}(\sqrt{2}) = \mathrm{span}(v_2)$

$\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ base diagonalizzante per L_A : $M_{\mathcal{V}}(L_A) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Teorema Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Siano $v_1, \dots, v_k \in V - \{0_V\}$ autovettori relativi risp. ad autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a due a due distinti. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Dim $f(v_i) = \lambda_i v_i \quad , i = 1, \dots, k.$

Ragioniamo per induzione su $k \geq 1$.

Base dell'induzione: $k = 1$

$v_1 \neq 0_V$ è lin. indip. (ovvio)

Ipotesi induttiva: Supponiamo vero l'enunciato per $k-1 \geq 1$ e dimostriamolo per $k \geq 2$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) = 0_V \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0_V$$

Dalla 1ª si ha $\alpha_k v_k = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{k-1} v_{k-1}$ e sostituiamo

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_k (-\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{k-1} v_{k-1}) = 0_V$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0_V$$

Per l'ipotesi induttiva $v_1, \dots, v_{k-1}$ sono lin. indip. in quanto sono $k-1$ autovettori relativi ad autovalori distinti $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0 \end{cases}$

Ma $\lambda_i - \lambda_k \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k-1$ perché i λ_i sono a due a due distinti $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$

Sostituendo: $\alpha_k v_k = 0_V \Rightarrow \alpha_k = 0$ perché $v_k \neq 0_V$.