LOGICA

Lezione 6 : Sistemi Deduttivi (per Logica Proposizionale)

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della lezione

- Recap Sistemi deduttivi
- Tableau

Deduzione Naturale

- È un sistema di derivazione basato su un'insieme di inferenze naturali, (e.g. dimostrazione per casi, per assurdo, condizionali) definite tramite le regole sui connettivi
- Ogni connettivo ha regoe di introduzione e eliminazione
- Esempi:
  - $(\rightarrow i)$ corrisponde alla dimostrazione condizionale
  - $(\vee e)$ corrisponde alla dimostrazione per casi

Regole dei Connettivi

- **Falsità e Negazione:**
  - $(\perp e)\ \ \perp \vdash A$
  - $(\neg e)\ \ \ A, \neg A \vdash \perp$
  - $(\neg i)\ \ \ se\ A \vdash \perp\ allora\ \vdash \neg A$
  - $(\neg e.2)\ \ se\ \neg A \vdash B\ e\ A \vdash B\ allora\ \vdash B$
  - *(terzium non datur)* $\vdash A \vee \neg A$ (dalle regole $\vee i.1\ \vee i.2, \neg e.2$)
  - (regola di Pierce) $se\ \neg A \vdash A\ allora\ \vdash A$
  - $(\perp i)\ \ se\ \neg A \vdash A\ allora\ \neg A \vdash \perp$ (dalle regole di Pierce e $\neg e$)
  - $se\ \neg A \vdash \perp$ allora $\neg A \vdash A$ (dalla regola $\perp e$)
- **(RAA)** $se\ \neg A \vdash \perp\ allora\ \vdash A$

Regole Condizionali nell'albero di derivazione

- Dato un albero di derivazione di P
- data qualche ipotesi che include Q
- allora se Q è $[Premesse\ sussidiarie]$ in una sottoformula derivate, possiamo eliminare l'ipotesi

- Esempio: regola $(\rightarrow\ i\ )$ ci permette di inferire $\varphi \rightarrow \psi$

Esempio di deduzione Naturale

- $\vdash_{DN} \; A \to (B \to A)$

$$\dfrac{\dfrac{[A]_1}{B \to A}}{A \to (B \to A)}\,(\to i)[A]_1$$

Esempio di deduzione Naturale

- $\vdash_{DN} \ (\neg A \vee B) \to (A \to B)$

Esempio di deduzione Naturale

$$\dfrac{[\neg A \vee B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad [\neg A]}{\bot}(\neg e)}{B}(\bot e)}{A \to B}\,3 \qquad \dfrac{[B]}{A \to B}\,4}{\dfrac{A \to B}{(\neg A \vee B) \to (A \to B)}\,1}\,2$$

$(\to i)$ $[\cancel{A}]_3$ $[A]_4$

$(\vee e)$ $[\neg \cancel{A}]_3$ $[\cancel{B}]_{2,4}$

$(\to i)$ $[\neg A \cancel{\vee} B]$ 1

Regole del sistema LK (Logik Klassische)

$(Ax) \quad A \vdash A$

$(taglio) \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$

$(perm - l) \quad \dfrac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}$

$(perm - r) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}$

$(contr - l) \quad \dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$

$(contr - r) \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$

$(indeb - l) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$

$(indeb - r) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$

$(\wedge l.1) \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$

$(\wedge r) \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$

$(\wedge l.2) \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$

$(\vee l) \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$

$(\vee r.1) \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$

$(\vee r.2) \quad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$

$(\rightarrow l) \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$

$(\rightarrow r) \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}$

$(\neg l) \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$

$(\neg r) \quad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$

Nomenclatura

- **Formula Principale** dell’inferenza logica: quella dove è stato introdotto il connettivo
- **Formula Ausiliaria** dell’inferenza logica: le sottoformule costituenti le formule principale
- **Parametri**: tutte le formule che non sono ausiliarie e principale
- **Contesto**: l’insieme dei parametri
- La f. ausiliaria ha la **stessa polarità** di quella principale se compare nel sequente premessa dallo stesso lato del sequente dove compare la f. principale, in caso contrario ha **polarità inversa**

Esempio

$$(\rightarrow l)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad\qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$$

- $A \rightarrow B$ formula principale
- A, B formule ausiliarie
- $\{\Gamma, \Delta\}$ contesto
- A ha polarita` inversa, B ha la stessa polarità

Osservazioni sul Calcolo dei Sequenti

- Non c'è la costante falso $\perp$
- Sì ammettono sequenti con parte destra vuota, $\Gamma \vdash$
- assenza della conclusione come inconsistenza delle premesse
- $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}$ regola di indebolimento a destra

- L'assioma $A \vee \neg A$ è derivabile

$(\vdash A \vee \neg A\,)$ è derivabile

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{\vdash \neg A, A}\,(\neg r)}{\vdash A \vee \neg A, A}\,(\vee\, r.2)}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,(\vee\, r.1)}{\vdash A \vee \neg A}\,(contr - r)$$

Teorema Gentzen's Hauptsatz

- **(taglio)** $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \mathrm{A}, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

- La regola del taglio è ridondante

- **Teorema Gentzen's Hauptsatz**: Ogni inferenza logica che usa la regola del taglio può essere riscritta in una che non la usa.

- La dimostrazione è lunga e complessa e non la vediamo

Proprietà della sottoformula

- Nel calcolo dei sequenti senza regola del taglio.

- Una dimostrazione di $\Gamma \vdash \Delta$ contiene solo sequenti le cui sottoformule sono sottoformule di Γ, Δ.

- Oss: le regole sono solo di introduzione e mai di eliminazione, quindi una volta costruita una formula composta non c'è modo di eliminarla

- Il calcolo dei sequenti ha una natura *costruittiva*

Esempio

- $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}}{\vdash A, B, \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{\vdash B, \neg B}\,(\neg\text{-r})}{\vdash A, B, \neg B}\,(\text{indeb-r})}{\vdash A, B, \neg A \wedge \neg B}\,(\wedge r)}{\vdash A \vee B, A \vee B, \neg A \wedge \neg B}\,(\vee r.1, \vee r.2)}{\vdash A \vee B, \neg A \wedge \neg B}\,(\text{contr-r})}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}\,(\neg e)
$$

Invertibilità

- Non è sempre così ovvio scegliere la regola
- Esempio $\vdash A \vee \neg A$
- $\dfrac{\dfrac{???}{\vdash A}}{\vdash A \vee \neg A}$, $\dfrac{\dfrac{???}{\vdash \neg A}}{\vdash A \vee \neg A}$

LK formulazione II

- Ma usando la $(contr - r)$ abbiamo che $(\vee r)$ diventa:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \vee B, \mathrm{B}, \Delta}}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \vee B, \mathrm{A} \vee B, \Delta}}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \vee B, \Delta}$$

- Cioè se riscriviamo: $(\vee r \; - II)\,\frac{\Gamma \vdash \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \vee B, \Delta}$

Allora:

$$\cfrac{\cfrac{\mathrm{A} \vdash \mathrm{A}}{\vdash A, \neg A}}{\vdash A \vee \neg A}$$

LK formulazione II

- Similmente possiamo dedurre:

- $(\wedge\, l - II)\,\dfrac{\Gamma \vdash \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \wedge B, \Delta}$

- Chiamiamo il sistema con $(\wedge\, l - II)$ e $(\vee\, r\ - II)$ sistema LK formulazione II e per questo esiste sempre un’unica regola per introdurre un connettivo.

Invertibilità

- Nel sistema LK formulazione II le formule sono invertibili:
  - se esiste una dimostrazione, questa si può trovare partendo da una qualsiasi scelta della formula principale su cui lavorare.
- Sistema di prova costruttivo.
- Dimostrazione **automatica**.

Metodo dei Tableau Analitici

- Uno dei metodi più semplici da comprende e facili da implementare
- È un metodo per provare che un insieme di formule **non** è soddisfacibile
- Prova che $\Gamma \vdash P$ dimostrando che $\Gamma \cup \{\neg P\}$
- Si ricordi il **lemma 1.13** : $\Gamma \vDash P \iff \Gamma \cup \{\neg P\}$ è insoddisfacibile

Metodo dei Tableau Analitici

- Il Tableua è un albero binario
- Ogni nodo è una formula del tipo P o $\neg P$
- In alcune notazioni si usa $\mathbb{T}P$ e $\mathbb{F}P$ e si chiamano formule con segno (**signed formulas**)
- $\Gamma \cup \{\neg P\}$ è la radice dell'albero, i.e. premessa e negazione della conclusione

Costruzione dell’albero

- Dalla radice l’albero si costruisce usando le regole di espansione (di inferenza)
- Ogni connettivo binario ha due regole di espansione, una “positiva” ed una “negativa”
- La negazione ha una solo regola di “negativa” di eliminazione della negazione

Regole di espansione

- Le regole che espandono l'abero:
  - in un unico ramo sono anche **deterministic** rules o $\boldsymbol{\alpha}$ rules $(A \land B, \neg(A \lor B), \neg(A \to B))$
  - in due rami sono anche dette **splitting** rules e $\boldsymbol{\beta}$ rules $(\neg(A \land B), A \lor B, A \to B)$

- $(\land)$ $\dfrac{A \land B}{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}$
- $(\lor)$ $\dfrac{A \lor B}{A \mid B}$
- $(\to)$ $\dfrac{A \to B}{\neg A \mid B}$
- $(\neg \land)$ $\dfrac{\neg(A \land B)}{\neg A \mid \neg B}$
- $(\neg \land)$ $\dfrac{\neg(A \lor B)}{\begin{matrix} \neg A \\ \neg B \end{matrix}}$
- $(\neg \to)$ $\dfrac{\neg(A \to B)}{\begin{matrix} A \\ \neg B \end{matrix}}$
- $(\neg\neg)$ $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

Chiusura dell’albero

- Un **ramo** è **chiuso** se esiste esistono due nodi del ramo con formule P e $\neg P$, cioè se contiene una formula e la sua negazione

- Un **tableau** (l’intero albero) è **chiuso** se ogni suo ramo è chiuso

- OSS: se ∃ un tableau chiuso per $\Gamma \cup \{\neg P\}$ significa che ogni ramo è contraddittorio e che qui $\Gamma \cup \{\neg P\}$ è insoddisfacibile

Esempio

$\neg(Q \vee P \rightarrow P \vee Q)$ (assunzione)

$Q \vee P$

$\neg(P \vee Q)$

$\neg P$

$\neg Q$

$Q \vee P$ (ricopiatura)

P | Q

$\neg P$ | $\neg Q$ (ricopiatura)

$\times$ | $\times$

Esempio

$\neg(\neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q))$ assunzione

$\neg P \vee Q$
$\neg(P \rightarrow Q)$
P
$\neg Q$
$\neg P \vee Q$ (ricopiatura)

$\neg P$	Q
P	$\neg Q$
X	X

$\neg P \vee Q$
$\neg(P \rightarrow Q)$

$\neg P$	Q
P	P
$\neg Q$	$\neg Q$
X	X

Esempio

- $\models ((P \to Q) \to P) \to P$

$\neg(((P \to Q) \to P) \to P)$ (assunzione)

- $(P \to Q) \to P$
- $\neg P$

$\neg(P \to Q)$	P
P	$\neg P$
$\neg Q$	X
$\neg P$	
X	

Esempio

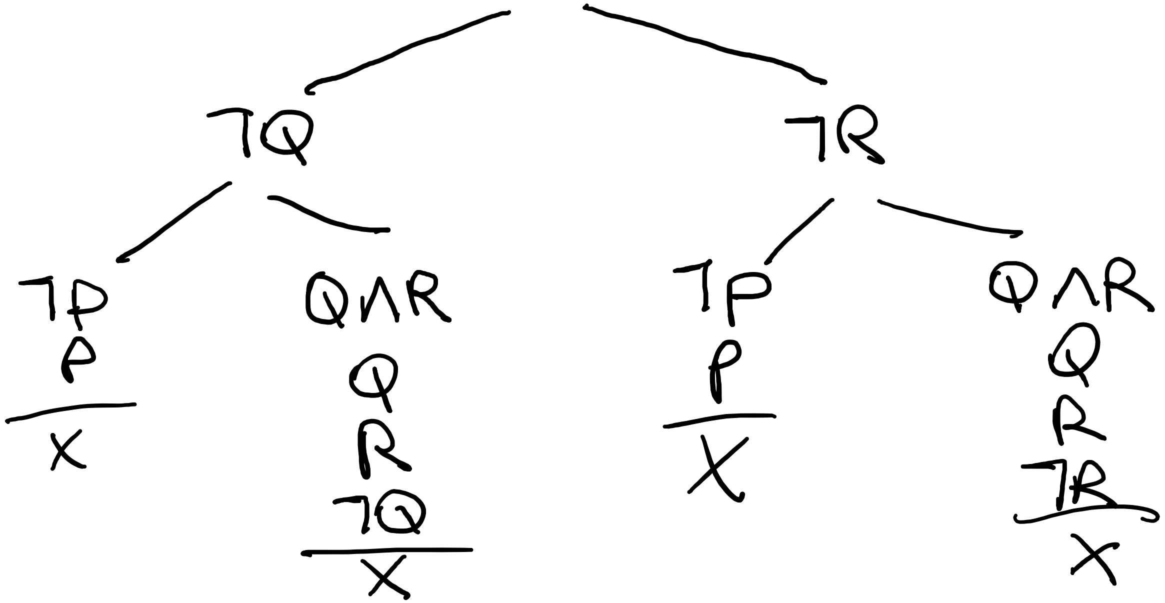
- $\underbrace{P \to (Q \land R)}_{1}, \underbrace{\neg Q \lor \neg R}_{2} \vDash \underbrace{\neg P}_{3}$

$P \to Q \land R$ assunzione 1

$\neg Q \lor \neg R$ assunzione 2

$\neg\neg P$ assunzione 3

P



Sintassi e semantica

Sintassi (calcolo)	Semantica
$\Gamma \vdash P$ derivabilità	$\Gamma \vDash P$ cons. semantica
$\vdash P$ teorema	$\vDash$P tautologia
$\Gamma \vdash \perp$ inconsistenza	$\Gamma \vDash \perp$ insoddisfacibilità
$\Gamma \nvdash \perp$ consistenza	$\Gamma \nvDash \perp$ soddisfacibilità

Correttezza (Soundness) $\Longrightarrow$

Completezza (Completeness) $\Longleftarrow$