Teorema Sia $p \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è radice di p, cioè $p(\lambda)=0$, se e solo se $x-\lambda$ divide p, ovvero $\exists\, q \in \mathbb{K}[x]$ t.c. $p = (x-\lambda)\cdot q$.

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ $p = (x-\lambda)\, q \Rightarrow p(\lambda) = 0 \cdot q(\lambda) = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ Siano $q, r \in \mathbb{K}[x]$ risp. il quoziente e il resto della divisione di p per $x-\lambda$. Allora r ha grado $< 1 \Rightarrow r \in \mathbb{K}$ (costante)

$$p = (x-\lambda)\, q + r$$

$$0 = p(\lambda) = r \quad \Rightarrow p = (x-\lambda)\, q.$$

Pertanto se $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ sono le radici (o zeri) di $p \in \mathbb{K}[x]$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$, si ha che

$$p = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}\, q$$

dove $q \in \mathbb{K}[x]$ è un polinomio <u>senza</u> radici in $\mathbb{K}$.

L'esponente $m_i \in \mathbb{N}$ di $x-\lambda_i$ è detto <u>molteplicità</u> della radice λ_i. Si ha $m_i \geq 1 \ \forall i$ e

$$m_1 + \cdots + m_k \leq \deg p \quad (\text{grado di } p)$$

e vale $=$ $\Leftrightarrow$ $q =$ costante.

OSS Se $p \in \mathbb{K}[x]$, $\deg p \geq 1$, e $\lambda \in \mathbb{K}$ è radice di p allora la molteplicità di λ è il più grande intero $m \geq 1$ t.c. $(x-\lambda)^m$ divide p.

Def Sia $p \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio di grado ≥ 1.
Diciamo che p <u>ha tutte le radici in $\mathbb{K}$</u> se p è prodotto di fattori di 1° grado, cioè $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ a due a due distinti e $\exists\, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ t.c.

$$p = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}.$$

In tal caso $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli zeri distinti di p, $m_1, \dots, m_k$ risp. le loro molteplicità e

$$m_1 + \dots + m_k = \deg p.$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio complesso di grado ≥ 1.
Allora p ha almeno una radice complessa.

Questo teorema non lo dimostriamo in questo corso.
Non vale in $\mathbb{R}$, es. x^2+1 non ha radici reali (ma ha le radici complesse $\pm i$).

Ne segue che se $p \in \mathbb{C}[x]$ è un qualunque polinomio complesso con $\deg p \geq 1$ allora $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j\ \forall i \neq j$ e $\exists\, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$p = a(x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è il coefficiente del termine di grado massimo di p.

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f: V \to V$ endomorfismo

Una base $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ per V diagonalizza f
$\iff$ i vettori di base $u_1, \dots, u_n$ sono autovettori di f.

Siano ora $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ basi di V.
Poniamo $A = M_{\mathcal{V}}(f)$, $A' = M_{\mathcal{V}'}(f) \in M_n(\mathbb{K})$, $S = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V)$
quindi $S \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$A' = M^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}}(id_V)\, M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f)\, M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V) = S^{-1} A S$$

Def Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili se
$\exists\, S \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = S^{-1} A S$

Pertanto se $f \in \operatorname{End} V$ e $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$ sono basi di $V \Rightarrow$
$M_{\mathcal{V}}(f)$ e $M_{\mathcal{V}'}(f)$ sono simili (si può dimostrare facilmente anche il viceversa).

Teorema Se $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico, cioè $p_A = p_{A'}$.

Dim $S \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $A' = S^{-1} A S$

$$p_{A'} = \det(A' - x I_n) = \det(S^{-1} A S - x I_n) =$$

$$= \det\left(S^{-1}(A - x I_n) S\right) =$$

$$= \cancel{\det(S^{-1})} \det(A - x I_n) \cancel{\det S} = p_A$$

perché $\det(S^{-1}) = (\det S)^{-1}$.

Def Sia $f \in End(V)$ con $\dim V = n$. Il polinomio caratteristico di f è definito come

$$p_f \overset{def}{=} p_{M_\mathcal{V}(f)}$$

dove $\mathcal{V}$ è una base qualunque di V.

OSS La definizione è <u>ben data</u>: in virtù del teorema p_f non dipende dalla base $\mathcal{V}$ di V ma solo da f.

Pertanto per calcolare p_f si sceglie una base di V qualunque, si determina la matrice $A = M_\mathcal{V}(f)$ e si ha $p_f = p_A$.

Def Sia $f \in End(V)$, $\dim V = n$, e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di f. Si chiama <u>molteplicità algebrica</u> di λ la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico p_f di f e la si denota con $m_a(\lambda)$.

OSS $m_a(\lambda)$ è l'intero più grande t.c. $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)}$ divide p_f. Si ha $1 \leq m_a(\lambda) \leq \dim V$.

Def Sia $f \in End(V)$, $\dim V = n$, e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di f. La molteplicità geometrica di λ è il numero $m_g(\lambda) \overset{def}{=} \dim Aut(\lambda)$.

OSS $1 \leq m_g(\lambda) \leq \dim V$.

Teorema delle molteplicità Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vett. di dimensione finita, e sia $f \in End(V)$. Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di f. Allora $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Dim Poniamo $n = \dim V$ e $m = m_g(\lambda) \leq n$.
Sia $(v_1, \dots, v_m)$ base per $Aut(\lambda)$ e estendiamola ad una base $v = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ per V.

$f(v_j) = \lambda v_j$ se $1 \leq j \leq m$ dato che $v_1, \dots, v_m \in Aut(\lambda)$.

$$A = M_v(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & Q \\ \hline 0 & S \end{array}\right) \quad \text{con } S \in M_{n-m}(\mathbb{K})$$

$$p_f = p_A = \det(A - x I_n) = \left|\begin{array}{c|c} (\lambda - x) I_m & Q \\ \hline 0 & S - x I_{n-m} \end{array}\right| =$$

$$= \det((\lambda - x) I_m) \det(S - x I_{n-m}) =$$

$$= (\lambda - x)^m p_S(x) \implies (\lambda - x)^m \text{ divide } p_f$$

$$\implies m = m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$. Sia $f \in End(V)$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ gli autovalori distinti di f. Allora $Aut(\lambda_1) + \dots + Aut(\lambda_k)$ è una somma diretta. Possiamo quindi scrivere $Aut(\lambda_1) \oplus \dots \oplus Aut(\lambda_k) \subset V$.

Dim $v_i \in Aut(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$ t.c. $v_1 + \dots + v_k = 0_V$
$\implies v_1 = \dots = v_k = 0_V$ perché sono lin. indip.

Teorema di diagonalizzazione Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vett. di dim. finita e sia $f \in \operatorname{End} V$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ le radici distinte di p_f. Le seguenti sono equivalenti:

i) $m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) = \dim V$ e $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)\ \forall i$;

ii) $m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k) = \dim V$;

iii) $\operatorname{Aut}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Aut}(\lambda_k) = V$;

iv) f è diagonalizzabile.

Dim $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ ovvio

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$

$$\dim\left(\operatorname{Aut}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Aut}(\lambda_k)\right) = m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k) = \dim V$$
$$\Rightarrow \operatorname{Aut}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Aut}(\lambda_k) = V.$$

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$ Si scelgano basi di $\operatorname{Aut}(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$ e si uniscano, ottenendo una base per V. Essendo questa una base di autovettori, è diagonalizzante per f.

$\boxed{(iv) \Rightarrow (iii)}$ $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V diagonalizzante f

$\Rightarrow v_i$ autovettore $\forall i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$

$$V = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n) \subset \operatorname{Aut}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Aut}(\lambda_n) \subset V.$$

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ $m_g(\lambda_i) = \dim \operatorname{Aut}(\lambda_i)$

$$\dim V = m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k) \leq m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) \leq$$
$$\leq \deg p_f = \dim V \Rightarrow m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) = \dim V$$

e $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)\ \forall i$.

Corollario Sia $f \in End(V)$ e $\dim V = n$. Se p_f ha n radici distinte in $\mathbb{K}$ allora f è diagonalizzabile.

Dim $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ radici di p_f, $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j \implies$

$p_f = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x) \implies m_a(\lambda_i) = 1 \implies$

$m_g(\lambda_i) = 1$ e quindi f è diagonalizzabile per (ii) del teorema.

Corollario Sia V uno spazio vettoriale complesso, $\dim V = n$, e sia $f \in End(V)$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici distinte di p_f. Allora f è diagonalizzabile $\iff m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$.

Dim Per il Teorema fondamentale dell'algebra

p_f ha tutte le radici in $\mathbb{C} \implies$

$m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) = \dim V$. La tesi segue dal teorema.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A = (1-x)^2 + 4 = (1-2i-x)(1+2i-x)$

$\lambda_1 = 1-2i$, $\lambda_2 = 1+2i$ autovalori

$\lambda_1)$ $(A - (1-2i) I_2) X = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$ix + y = 0$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ base di $Aut(1-2i)$

$\lambda_2)$ $(A - (1+2i) I_2) X = 0$ $\quad \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$-ix + y = 0$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$v = (v_1, v_2)$ base diagonalizzante $\quad M_v(L_A) = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$