

$$\frac{d}{dt} N(t) = N'(t) = B(t) - D(t) + M_+(t) - M_-(t)$$

$$N'(t) = \Phi(N(t), t)$$

$$N(t_0) = N_0$$

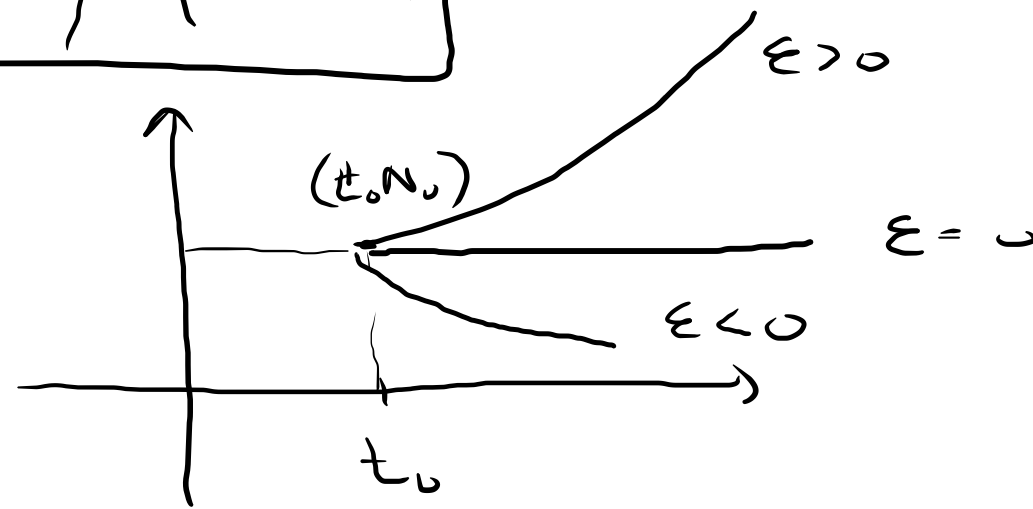
Malthus

$$B(t) = \beta N(t) \quad D(t) = \mu N(t) \quad M_+ = M_- = 0$$

$$N'(t) = (\beta - \mu) N(t) \quad R_0 = \frac{\beta}{\mu} \quad \boxed{\varepsilon = \mu (R_0 - 1)}$$

$$N(t_0) = N_0$$

$$N(t) = \underline{N_0} \cdot e^{(\beta - \mu)t}$$



Verlust

$$B(t) = \beta(t) N(t) \quad D(t) = \mu(t) N(t)$$

$$R_t = \frac{\beta(t)}{\mu(t)}$$

$$\underline{M_+ = M_- = 0}$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \beta - \tilde{\beta} N(t) \\ \mu(t) &= \mu - \tilde{\mu} N(t) \end{aligned}$$

$\beta, \tilde{\beta}, \mu, \tilde{\mu}$
numer real non-
negativ

(Verlust = Mol/Haus re $\tilde{\beta} = \tilde{\mu} = 0$)

$$\varepsilon(t) = \beta(t) - \mu(t) = \beta - \tilde{\beta} N(t) - \mu + \tilde{\mu} N(t) =$$

$$\varepsilon \neq 0$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\beta - \mu}_{\varepsilon} - N(t) (\tilde{\beta} - \tilde{\mu}) = \\ &= \varepsilon (1 - N(t) \left(\frac{\tilde{\beta} - \tilde{\mu}}{\varepsilon} \right)) \Rightarrow \frac{1}{K} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} N'(t) = \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot N(t) = \varepsilon N(t) - \frac{\varepsilon}{K} N^2(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad \Phi(N(t), t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} x' = (a - bx)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \underline{a = \varepsilon} \quad \underline{b = \varepsilon/K}$$

$$\int \frac{dx}{x(a-bx)} dx = \int dt$$

$$\parallel \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{a-bx} \right) dx$$

$$\begin{cases} \underline{A \cdot a = 1} \\ B - bA = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall x \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{matrix} (B - ba)x + \underline{A \cdot a} = 1 \\ A = \frac{1}{a} \\ B = b/a \end{matrix}$$

$$\int \frac{1}{x(a-bx)} dx = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x} dx + \int \frac{b}{a} \frac{1}{a-bx} dx =$$

$$= \frac{1}{a} \underbrace{\int \frac{1}{x} dx} + \frac{1}{a} \int \frac{b}{a-bx} dx$$

$$= \left\{ \frac{1}{a} \ln x + \frac{1}{a} \ln(a-bx) + C \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a-bx} + C \right\}$$

$$\frac{1}{a} \ln \left(\frac{x}{a-bx} \right) = t + C$$

$$\ln \frac{x}{a-bx} = a(t-t_0) + C$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{a-bx(t)} = e^{a(t-t_0)} \cdot C$$

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} + C e^{a(t-t_0)} b x(t) &= a e^{a(t-t_0)} C \\ x(t) &= \frac{a \cdot e^{a(t-t_0)} \cdot C}{1 + C e^{a(t-t_0)} \cdot b} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \cancel{C} \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{a \cancel{C} \cancel{e^{a(t-t_0)}}}{\cancel{C} \cancel{e^{a(t-t_0)}} (b + C^{-1} e^{-a(t-t_0)})}$$

$$= \frac{a}{b + C^{-1} e^{-a(t-t_0)}} = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{K} + \frac{\varepsilon - N_0 \frac{\varepsilon}{K}}{N_0} e^{-a(t-t_0)}}$$

$$a = \varepsilon$$

$$b = \varepsilon/K$$

$$x(t_0) = N_0$$

$$\frac{a}{b + C^{-1}}$$

$$\Rightarrow N_0 b + N_0 C^{-1} = a$$

$$C^{-1} = \frac{a - N_0 b}{N_0}$$

$$C = \frac{N_0}{a - N_0 b}$$

$$\underline{\underline{x(t) =}}$$

$$\frac{\cancel{\varepsilon} N_0}{\cancel{\varepsilon} N_0 + \cancel{\varepsilon} \left(1 - \frac{N_0}{K}\right) e^{-\varepsilon(t-t_0)}}$$

=

$$\frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-\varepsilon(t-t_0)}}$$

✓ N_0

$\varepsilon > 0$

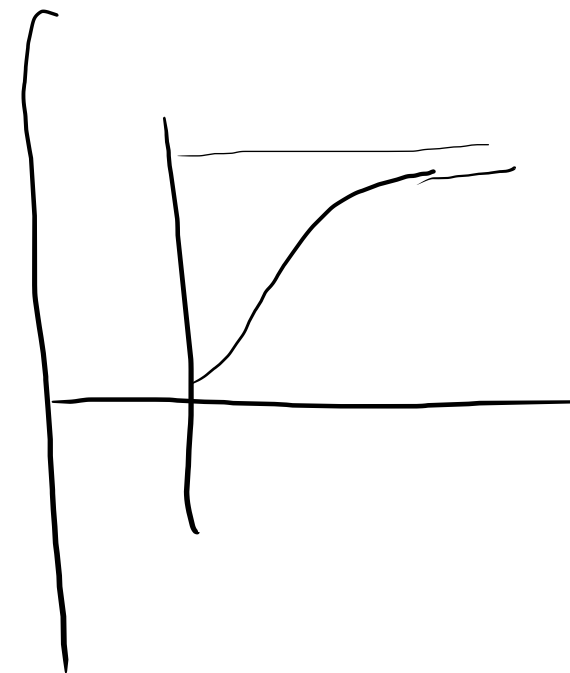
$x(t)$



K

✓

$t \rightarrow \infty$



$$\begin{cases} x' = \underline{ax} - bx^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Da un punto di vista
QUALITATIVO

$$x' = \underline{x(a - bx)}$$

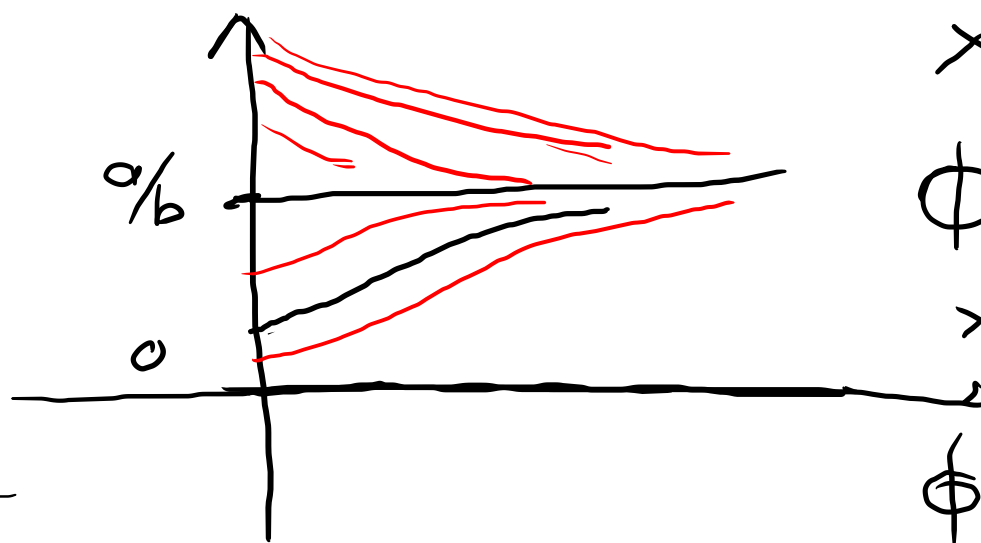
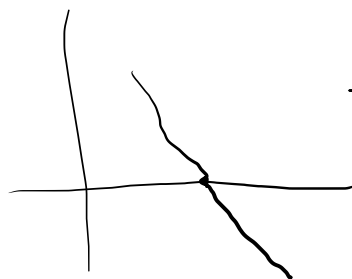
ci sono due equilibri

ovvero esistono $e_1 = 0$ $e_2 = \frac{a}{b}$ zero di

$$\Phi(x) = x(a - bx)$$

0 e' instabile

$\frac{a}{b}$ e' stabile



$x > \frac{a}{b}$

$\Phi(x) < 0$

$x < \frac{a}{b}$ $\Phi(\frac{a}{b}) = 0$

$\Phi(x) > 0$

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \Phi(x) \Big|_{\frac{a}{b}} < 0$$

Se $x' = \phi(x)$ e $\phi(x_0) = 0$ e

allora se ϕ è derivabile rispetto a x

ϕ' è continua in x_0 e $\phi'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$

è un punto di equilibrio stabile.

Verifichiamo quanto visto per $\phi(x) = x \cdot (a - bx)$

$$x_0 = a/b$$

$$\phi'(x) = a - 2bx$$

$$\phi'(a/b) = a - 2b \cdot \frac{a}{b} = a - 2a = -a < 0$$

$$x_1 = 0$$

$$\boxed{\phi'(0) = a > 0}$$

Caso di popolazione con migrazione costante

$$\underbrace{N'(t) = \varepsilon N(t) + \underline{m}}_{\text{Malthus}}$$

$$\underline{N(t_0) = N_0}$$

costante

$$N_0 = \frac{C}{\varepsilon} - \frac{m}{\varepsilon}$$

$$\int \frac{dN}{\varepsilon N + m} = \int dt$$

"

$$\frac{1}{\varepsilon} \int \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon N + m} \right) dN = \int dt$$

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon N_0 + m/\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} \ln(\varepsilon N + m) &= (t - t_0) + C \end{aligned}$$

$$\varepsilon N + m = e^{\varepsilon(t-t_0)} \quad \text{C}$$

$$\boxed{N(t) = \frac{C}{\varepsilon} e^{\varepsilon(t-t_0)} - \frac{m}{\varepsilon}}$$

$$N(t) = \left(\varepsilon N_0 + \frac{m}{\varepsilon} \right) e^{\varepsilon(t-t_0)} - \frac{m}{\varepsilon}$$

Se $\varepsilon < 0$
 $t \rightarrow +\infty$

$$N(t) \rightarrow -\frac{m}{\varepsilon} > 0$$

$$N'(t) = \varepsilon(t) \cdot N(t) + \underbrace{\mu_+(t) - \mu_-(t)}_{m(t)}$$

eq differenziale del primo ordine lineare

$$x' = B(t)x(t) + C(t)$$

Applicando la formula per la soluzione dell'eq. diff. lineare

$$N(t) = \left(\int_{t_0}^t m(s) e^{-\int_{t_0}^s \varepsilon(\sigma) d\sigma} + N_0 \right) e^{\int_{t_0}^t \varepsilon(\sigma) d\sigma}$$

Verhulst con moltiplicazione costante

(m constant)

$$\frac{dN}{dt} = N'(t) = \epsilon \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) \cdot N(t) + m$$

$$x' = x(a - bx) + m$$

$$a = \epsilon \quad b = +\epsilon/K$$

$-h$

prelievo costante

$$ax - bx^2 - h = 0$$

ha 2 radici reali $\Leftrightarrow$

$$\Delta = \underline{\underline{a^2 - 4bh \geq 0}}$$

Se $\Delta < 0$ NON ci sono
equilibri

$$\Phi(x) = ax - bx^2 - h$$

$$\phi(x)=0 \Leftrightarrow ax - bx^2 - h = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underline{b}x^2 - \underline{a}x + \underline{h} = 0$$

$$a^2 - 4bh = \Delta \geq 0$$

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2b}$$

✓ ep. instabil

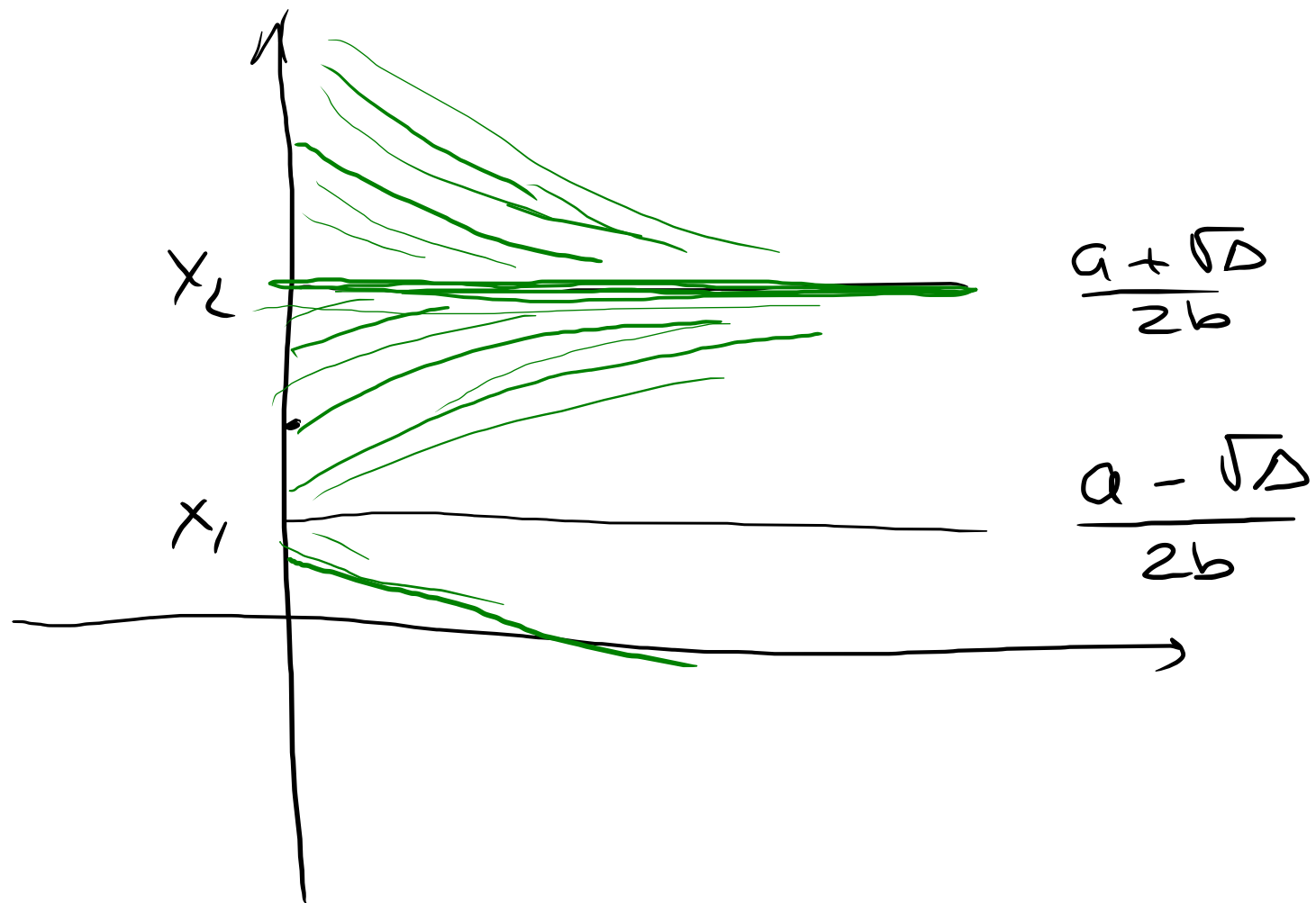
$$x_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2b}$$

↙ ep. stabil

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = -2bx + a = \phi'(x)$$

$$\phi'(x_1) = -\cancel{2b} \cdot \frac{a - \sqrt{\Delta}}{\cancel{2b}} + a = +\sqrt{\Delta} > 0$$

$$\phi'(x_2) = -2b \cdot \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2b} + a = -\sqrt{\Delta} < 0$$



2 population

$$\begin{cases} \underline{N_1'(t)} = \bar{\Phi}_1(N_1(t), N_2(t), t) \\ \underline{N_2'(t)} = \bar{\Phi}_2(N_1(t), N_2(t), t) \end{cases}$$

↖ sistema di (due) equazioni differenziali
del primo ordine

$$\begin{cases} x' = \phi_1(x, y, t) \\ y' = \phi_2(x, y, t) \end{cases}$$

$$x = N_1 \quad y = N_2$$

notazione vettoriale

$$\cancel{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\cancel{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\cancel{X}' = \phi(\cancel{X}, t)}$$

$$\phi(\cancel{X}, t) = \begin{pmatrix} \phi_1(\cancel{X}, t) \\ \phi_2(\cancel{X}, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Se Φ non dipende esplicitamente da t , il

sistema

$$\begin{cases} x' = \phi_1(x, y) \\ y' = \phi_2(x, y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dot{X} = \bar{\Phi}(X)$$

si dice AUTONOMO.

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \phi_1(x, y, t) \\ y' = \phi_2(x, y, t) \\ x(t_0) = x_0 \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si scrive equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{X} = \bar{\Phi}(X, t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Una coppia di funzioni derivabili in un intorno I di t_0
reale di variabile reale

$$\begin{aligned} t &\mapsto x(t) \\ t &\mapsto y(t) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{derivabili}$$

è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} X' = \Phi(X, t) \\ X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X(t_0) = x_0 \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{e } \forall t \in I$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \Phi(x(t), y(t), t)$$

Se $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(x, y) \\ \phi_2(x, y) \end{pmatrix}$ non dipende esplicitamente da t , il sistema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} x' = \phi_1(x, y) \\ y' = \phi_2(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{x}' = \bar{\Phi}(\cancel{x})$$

è autonomo; e inoltre si considera il
problema di Cauchy
$$\begin{cases} \cancel{x}' = \bar{\Phi}(\cancel{x}) \\ \cancel{x}(t_0) = \cancel{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

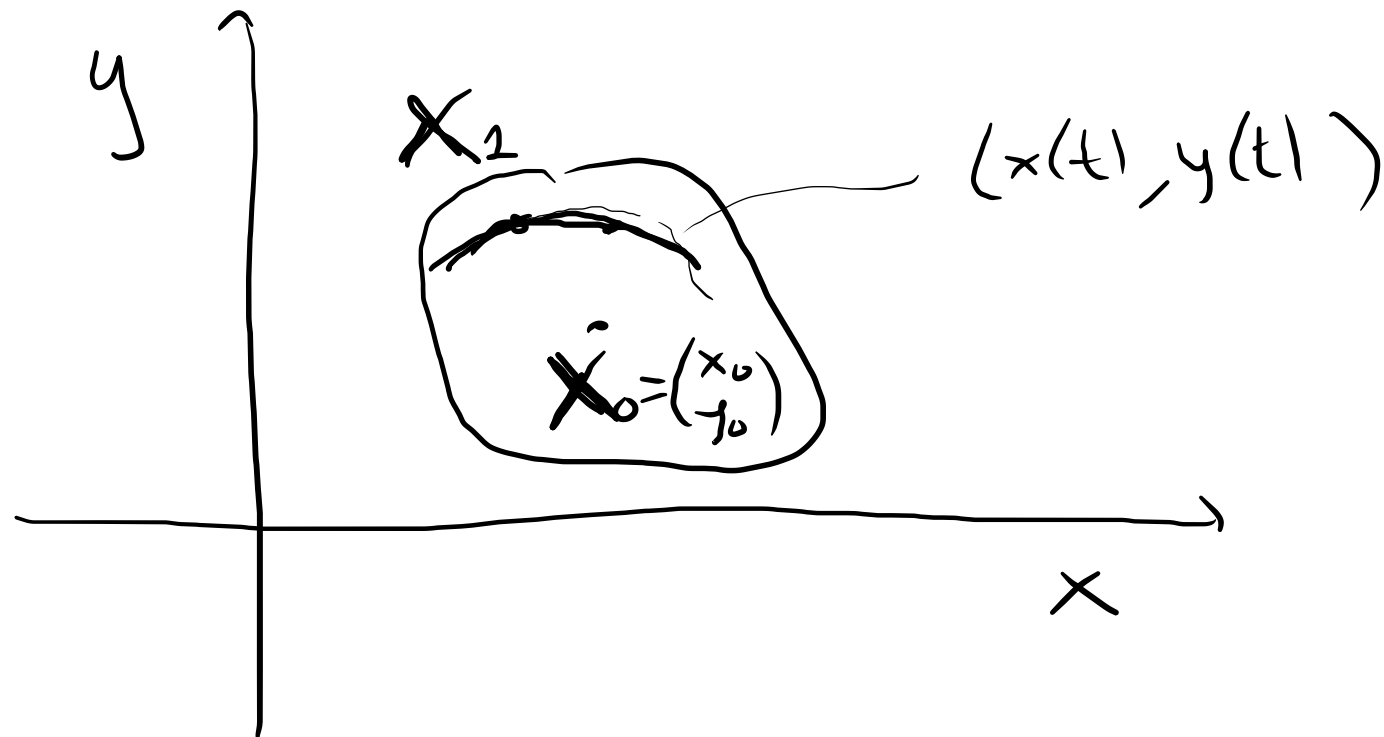
e se ϕ_1 e ϕ_2 sono DIFFERENZIABILI
(come funzioni di x e y) in un intorno di
 $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, allora vale la seguente versione
del teorema di esistenza locale ed unicità della
soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} X' = \phi(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

per ogni punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dell'intorno di $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$
ove ϕ_1 e ϕ_2 sono differenziabili pone
una ed una sola orbita $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
che rappresenta una soluzione del problema di
Cauchy

$$\begin{cases} X' = \phi(X) \\ X(t_1) = X_1 \end{cases}$$

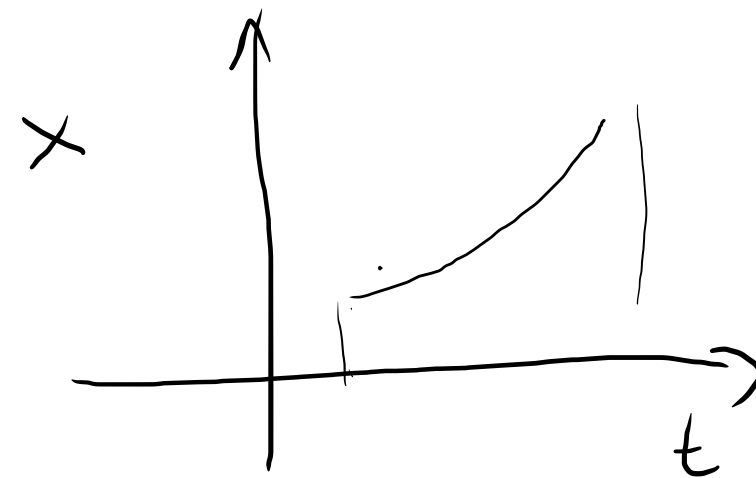
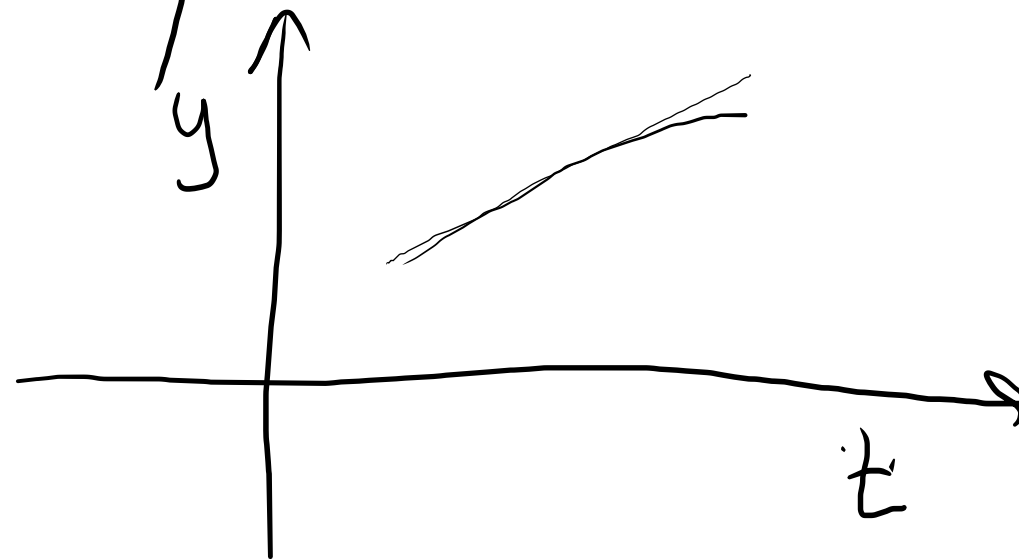
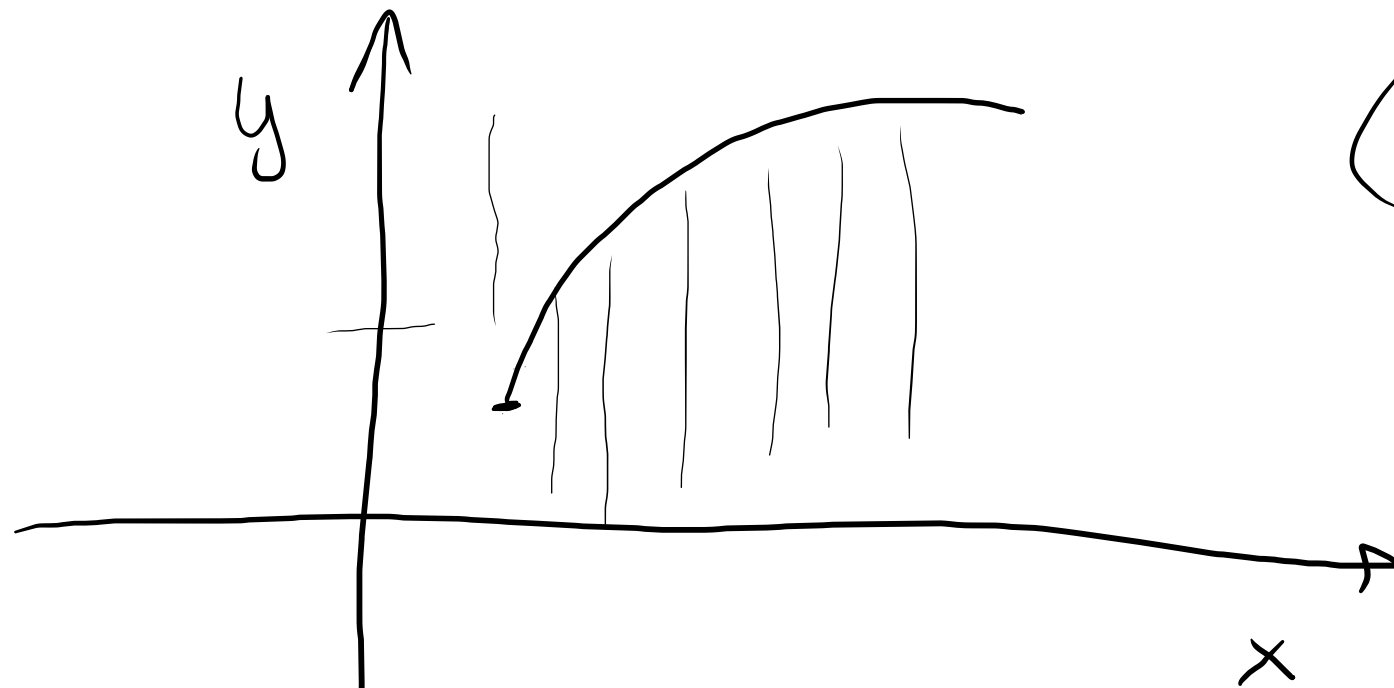
Non è vero che il sistema non è autonomo.

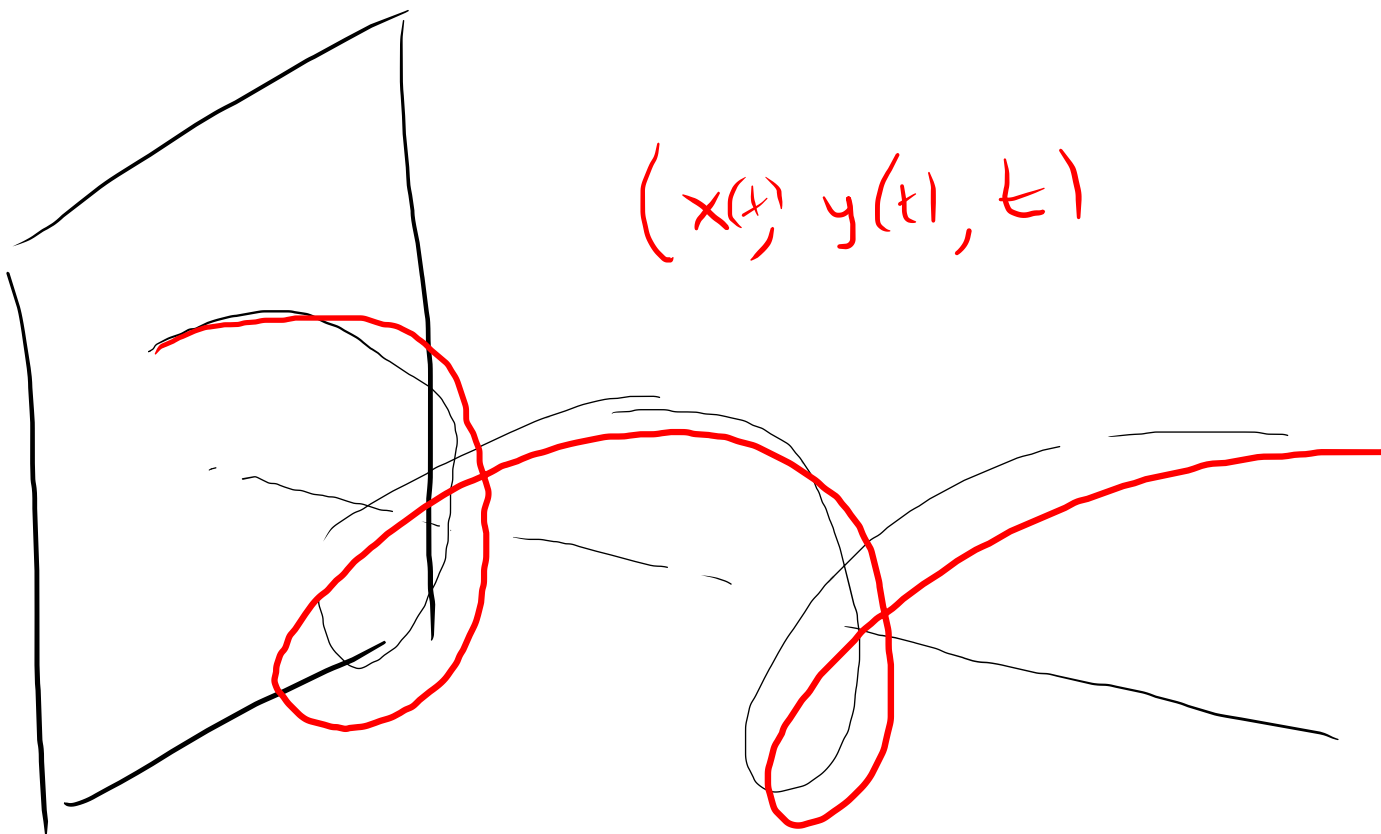


Piano delle fasi

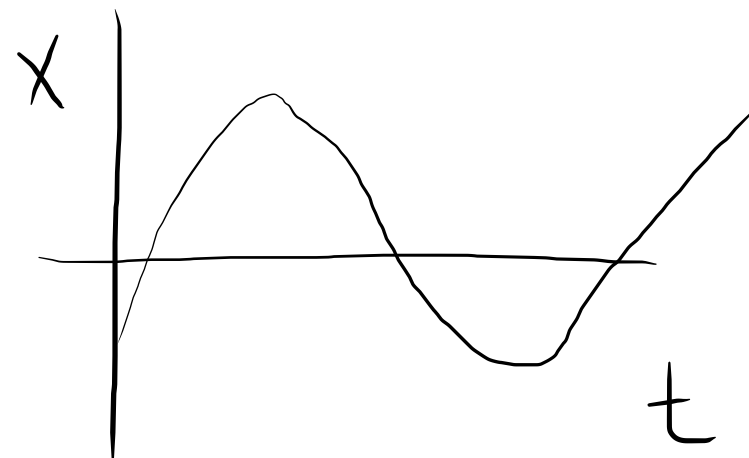
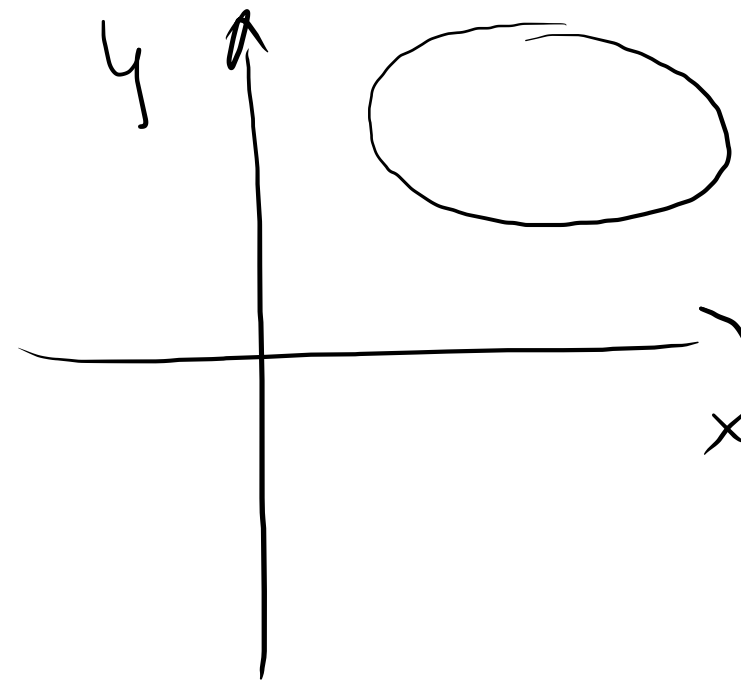
$$t \mapsto \underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}$$

curva in $\mathbb{R}^2$





$$(x(t), y(t), t)$$



Considereremo sistemi differenziali del primo ordine
(di due equazioni differenziali) autonomi

$$\textcircled{*} \quad \begin{cases} x' = \Phi_1(x, y) \\ y' = \Phi_2(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{X' = \Phi(X)}}$$

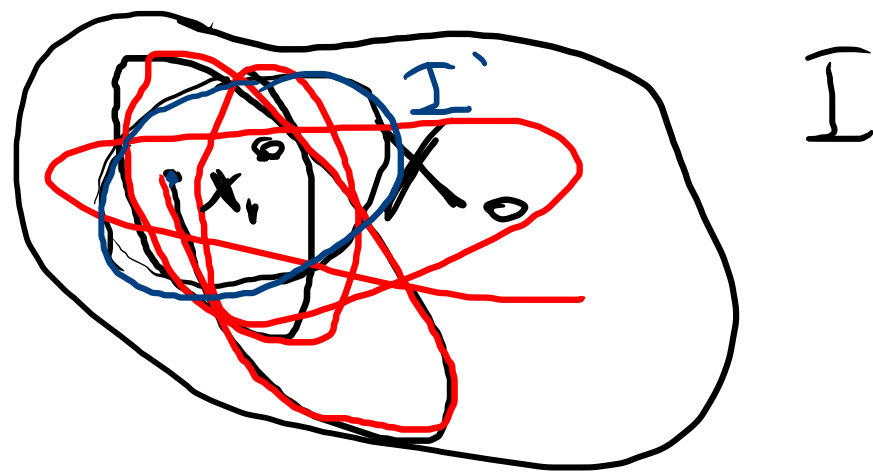
Def Un punto $\overset{x_0}{=} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si dice di equilibrio
(o critico) per $\textcircled{*}$ se $\underline{\underline{\Phi(X_0) = 0}} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi_1(x_0, y_0) = 0 \\ \Phi_2(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

Def Supponiamo X_0 sia un punto di equilibrio
 del sistema ISOLATO $X' = \Phi(X) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \Phi_1(x, y) \\ y' = \Phi_2(x, y) \end{cases}$
 (differenziale autonomo
 d. 2 eq. diff del primo ordine)

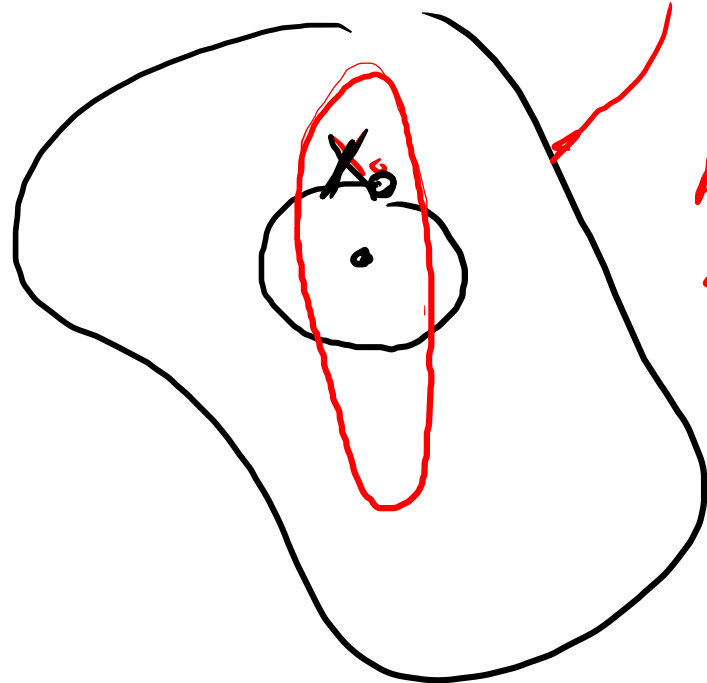


in un intorno di X_0 non ci sono altri
 punti di equilibrio per il sistema

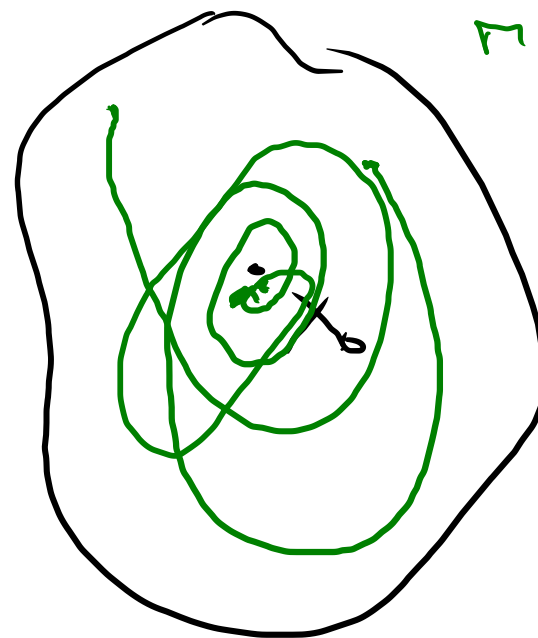
X_0 è stabile se presso comunque un intorno I di X_0
 esiste un intorno I' di X_0 contenuto in I tale che se
 $X_1 \in I'$ e $\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = X_1$, l'orbita $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ per $t > t_1$ appartiene a I .



Def Un punto di equilibrio x_0 è ASINTOTICAMENTE stabile se è STABILE e se per ogni orbita in I $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ si ha che questa tende a $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = x_0$.



STABILE
MA NON
ASINTOTICAMENTE
STABILE



ASINTOTICA =
MENTE STABILE

$$\begin{cases} x' = \phi_1(x, y) \\ y' = \phi_2(x, y) \end{cases}$$

Caso lineare

$$\phi_1(x, y) = ax + by$$

$$\phi_2(x, y) = cx + dy$$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Oss Se $b=0$ e $c=0$

le due equazioni differenziali

restano DISACCOUPLE

$$\begin{aligned} \text{come } \phi_1 &= ax & x' &= ax & x(t) &= C_1 e^{at} \\ \phi_2 &= dy & y' &= dy & y(t) &= C_2 e^{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

a, b, c, d sono costanti

Se x' è derivabile, dalla prima equazione si ottiene

$$x'' = ax' + b \underbrace{y'}_{\leftarrow}$$

Andando ad inserire la seconda eq. differenziale si ottiene

$$x'' = ax' + b \underbrace{(cx + dy)}_{\leftarrow} = ax' + bcx + d \underline{by}$$

Dalla prima eq. differenziale si ricava $\boxed{\underline{by} = x' - ax}$

$$\begin{aligned}
 x'' &= ax' + dby = ax' + d(x' - ax) + bcx \\
 &= ax' + bcx + dx' - adx \\
 &= (a+d)x' + (bc - ad)x
 \end{aligned}$$

$$\underline{Z}'' - (a+d)Z' + (ad - bc)Z = 0$$

eq differenziale del secondo ordine che proviene dal
 sistema lineare autonomo a coefficienti costanti.

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \cancel{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\Phi(X)}$$

Φ è una applicazione
lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. rappresentata
dalla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nella base canonica

$$\Phi(X)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

$$a + d = \text{tr}(A)$$

↑ traccia di A

ovvero la somma degli
elementi sulla diagonale di A

$$\underline{ad - bc} = \det(A)$$

↑ determinante di A

Prop $\text{tr}(A)$ e $\det(A)$

sono invarianti per cambio di base

$$A \xleftarrow{\Phi} A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$a' + d' = a + d$$

$$ad - bc = a'd' - b'c'$$

$$x'' - h x' + k x = 0$$

oscillatore con attrito

$$h^2 - 4k > 0 \longrightarrow$$

soluzioni scritte esplicitamente

$$h^2 - 4k = 0 \longrightarrow$$

"

"

$$h^2 - 4k < 0 \longrightarrow$$

"

"

Se

$$x'' = \Phi(x', x, t)$$

eq. differenziale del
secondo ordine in
forma normale

Si considera $\underline{u} = x'$ e si scrive, essendo

$$x'' = \begin{cases} \underline{u}' = \Phi(u, x, t) \\ x' = u \end{cases} \quad \underline{u}' = x''$$

Allora rispetto alle variabili (u, x) ho ottenuto
un sistema di 2 eq differenziali del primo ordine

in cui $\Phi_1 = \Phi$ e $\Phi_2(u, x, t) = u = \Phi_2(Y, t)$

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} \Phi(Y, t) \\ u \end{pmatrix}$$

In tal modo ogni eq. differenziale del II ordine si riduce ad un equivalente sistema di due eq. diff del primo ordine.

Se l'eq. differenziale di partenza è autonoma, avremo

$$x'' = \phi(x', x)$$

lo è anche il corrispondente sistema

$$\underline{Y}' = \underline{\Phi}(\underline{Y}) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \phi(u, x) \\ x' = u \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = Y_0$$

Possiamo quindi applicare il Teorema di Cauchy
d'esistenza e unicità locale delle soluzioni
e ottenere le richieste

$$u(t_0) = u_0$$

||

$$\underline{\underline{x'(t_0)}}$$

$$x(t_0) = \underline{\underline{x_0}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = \phi(x', x, t) \\ x'(t_0) = u_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

In mod analog

$$x^{(n)} = \Phi(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x', x, t)$$

$$x^{n-1} = u_1$$

$$x^{n-2} = u_2$$

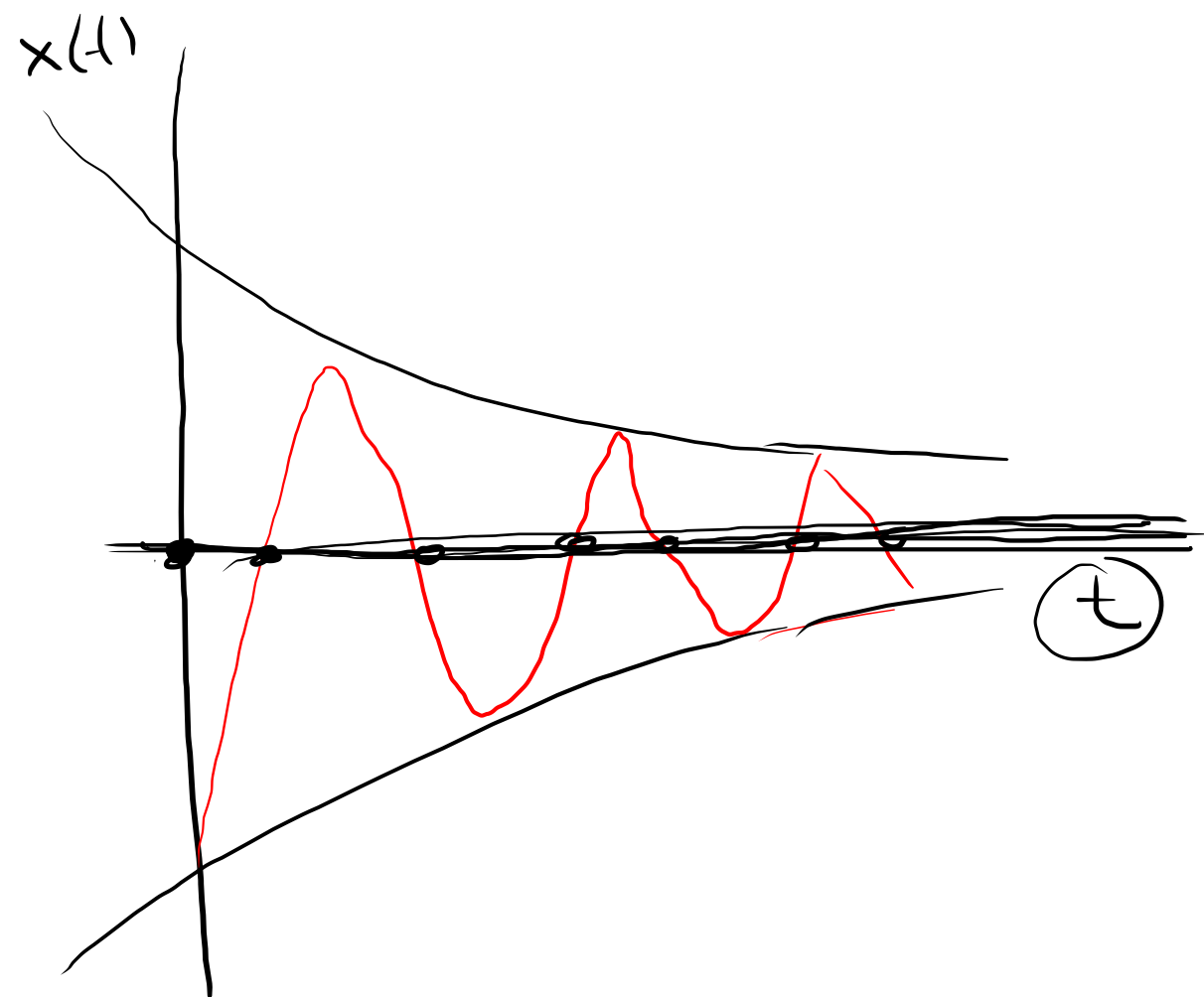
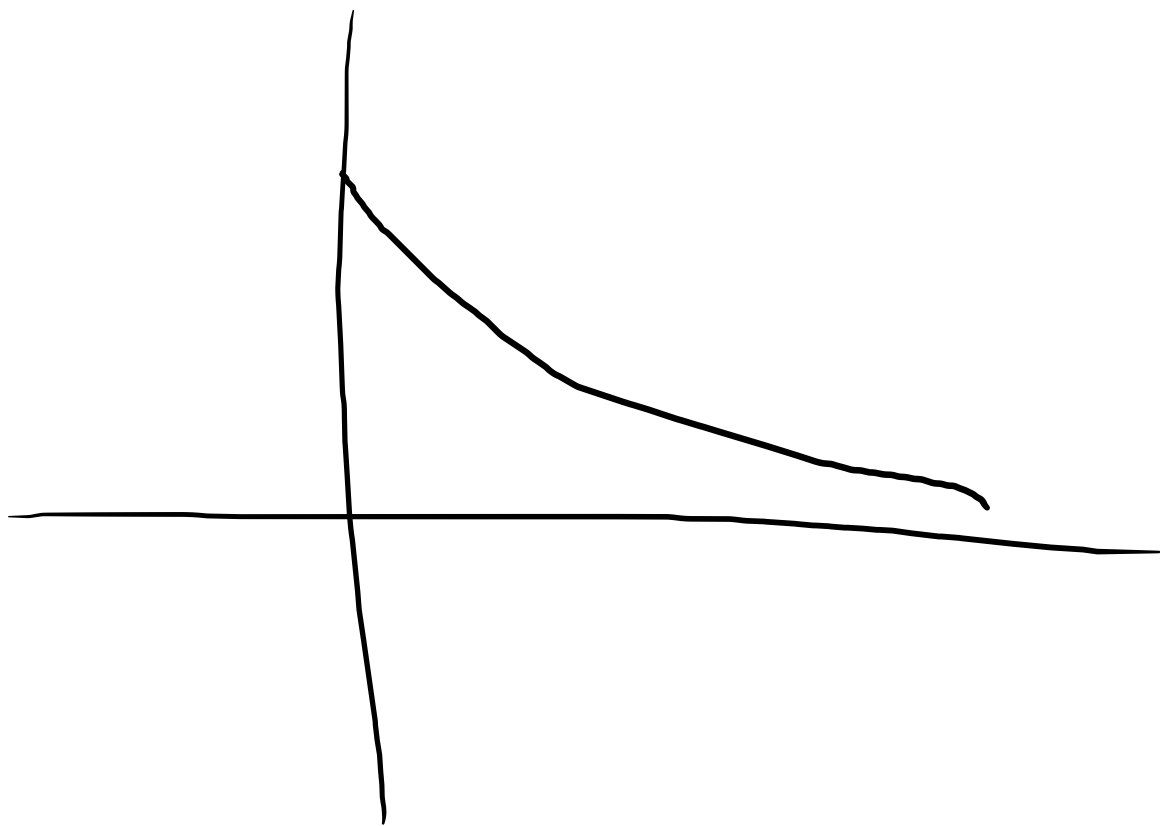
$$u_1' = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_n, t)$$

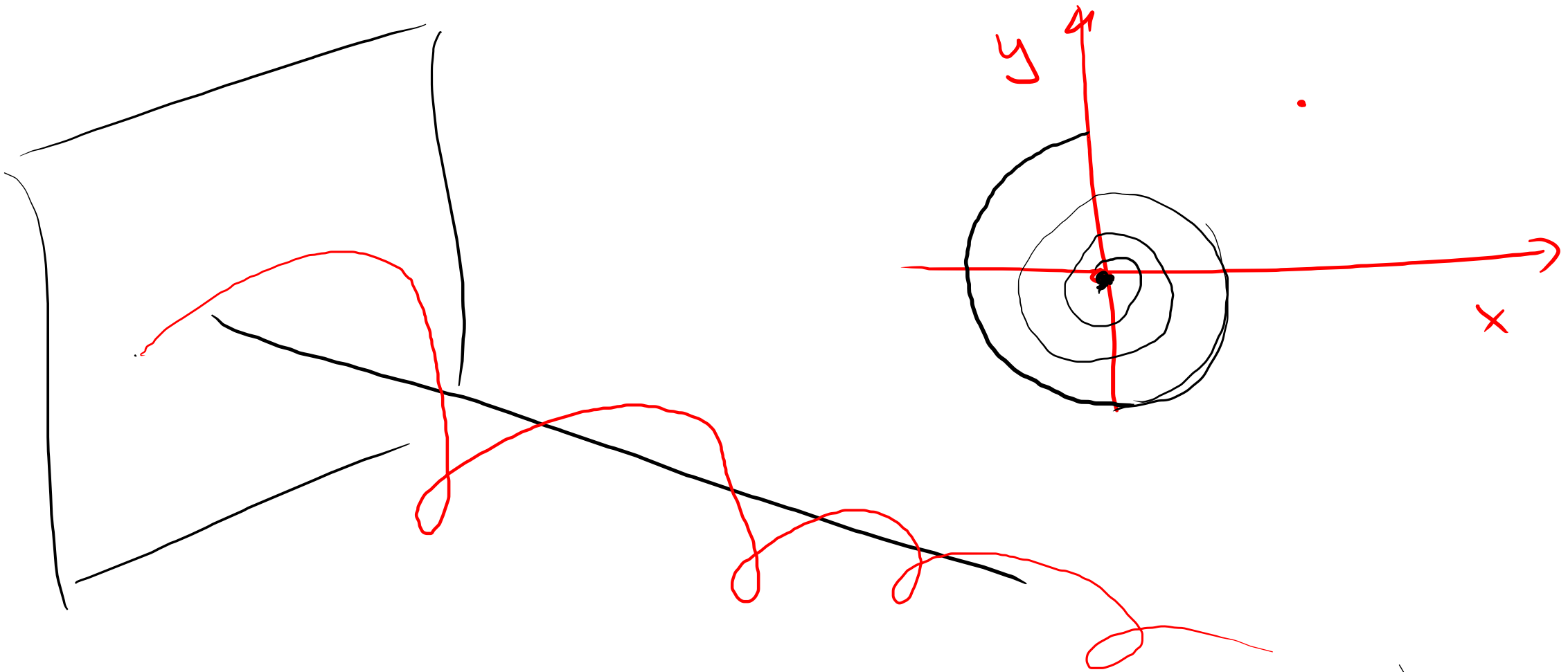
$$u_2' = u_1$$

$$u_3' = u_2$$

u

$\vdots$





11

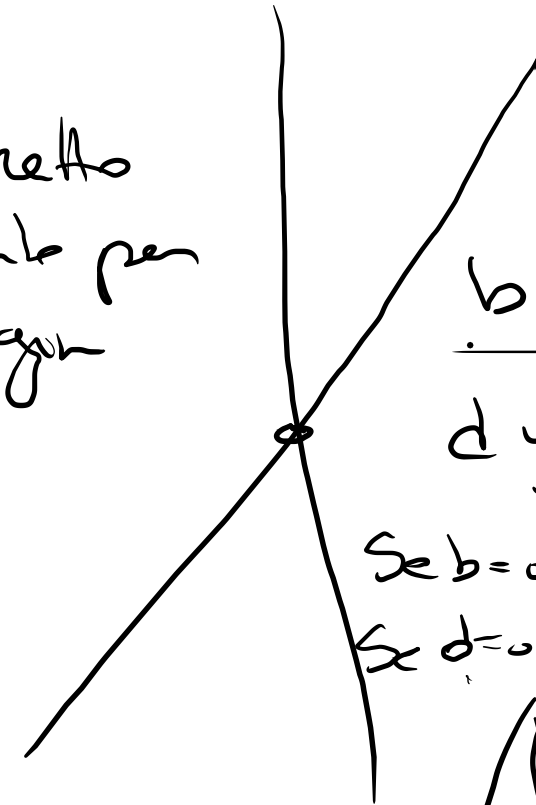
Cerchiamo i punti d'equilibrio del sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

$$\Phi_1(x, y) = \underline{ax + by = 0}$$

$$\Phi_2(x, y) = \underline{cx + dy = 0}$$

ep retto
permanente per
l'origine



Se $b=0$ $d \neq 0$

Se $d=0$ $b \neq 0$

(parallele
e incidenti)

$(0,0)$ è punto d'equilibrio ed è
isolato $\Leftrightarrow$ le due rette non sono coincidenti

$$\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

Se $d \neq 0$ e $b \neq 0$ $-\frac{a}{b} \neq -\frac{c}{d}$

$$\boxed{ad - bc \neq 0}$$