Esercizi su Diagonalizzazione
Ingegneria Industriale e Navale 2021/2022 - decimo foglio

December 15, 2021

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si dimostri che A ed ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori. Si può dire lo stesso per gli autovettori?

2. Per le seguenti matrici si dica se sono diagonalizzabili o meno:

$$\begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Si dica se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$
è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determinino una matrice diagonale $D \in M_4(\mathbb{R})$ ed una matrice M invertibile tale che $D = M^{-1} \cdot A \cdot M$.

4. Si determinino $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sapendo che
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
sono autovettori della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$
Si dica se A è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determini una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D, tali che $B^{-1} \cdot A \cdot B = D$.

5. Si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$
al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali? Per ogni tale a si determinino una matrice invertibile B e una matrice diagonale D tali che $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

(b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri complessi? Per ogni tale a si determinino una matrice invertibile B e una matrice diagonale D tali che $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

6. Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$, tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile.

7. Per ognuna delle seguente matrici A, si determini una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tale che $B^{-1} \cdot A \cdot B = D$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Si consideri l' operatore lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che f é digonalizzabile per ogni α. Si trovino i suoi autovalori ed i suoi autospazi, e se ne dia una interpretazione geometrica.

NOTA: f rappresenta una riflessione piana rispetto alla retta vettoriale di equazione

$$\sin(\alpha/2)x - \cos(\alpha/2)y = 0.$$

9. Si consideri l' operatore lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si determinino gli angoli α per cui f é digonalizzabile. Per tali α si trovino gli autovalori e gli autospazi, e se ne dia una interpretazione geometrica.

NOTA: f rappresenta una rotazione piana dell' angolo α in senso antiorario.