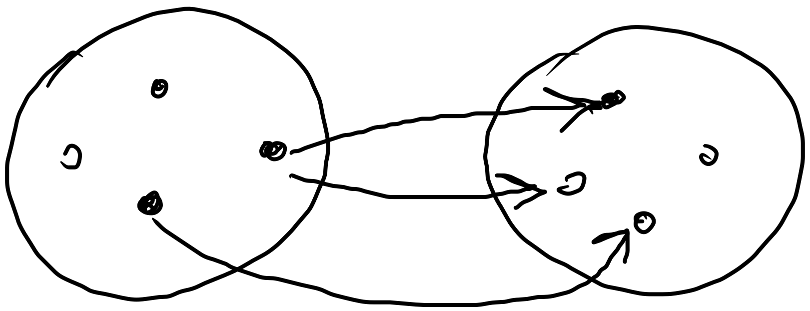
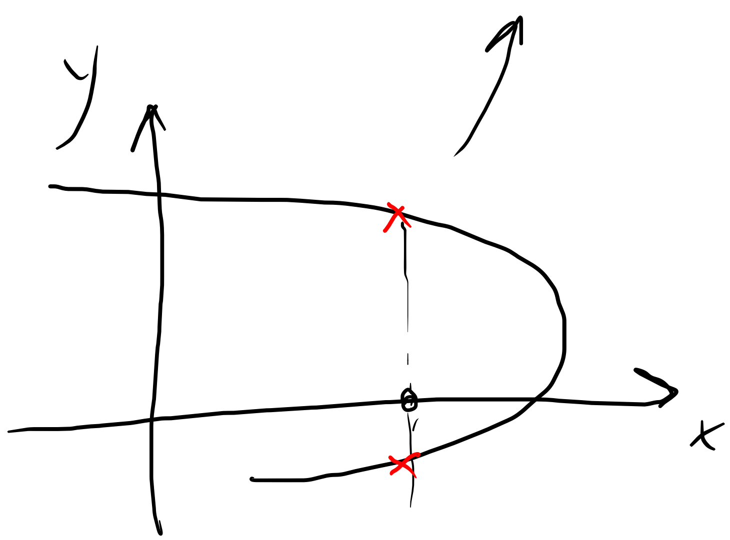
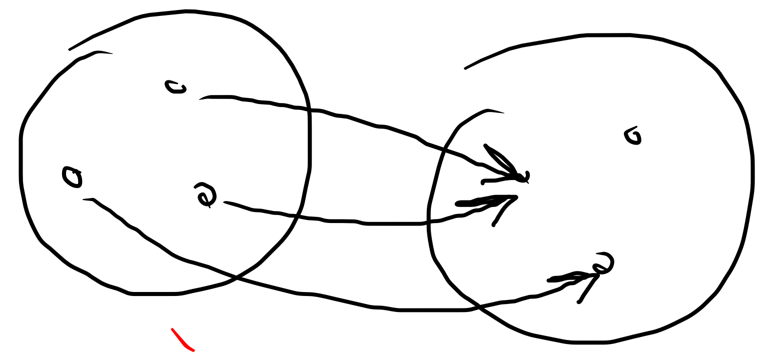
FUNZIONE: relazione tra due insiemi, che associa a ogni elemento del DOMINIO uno e un solo elemento del CODOMINIO

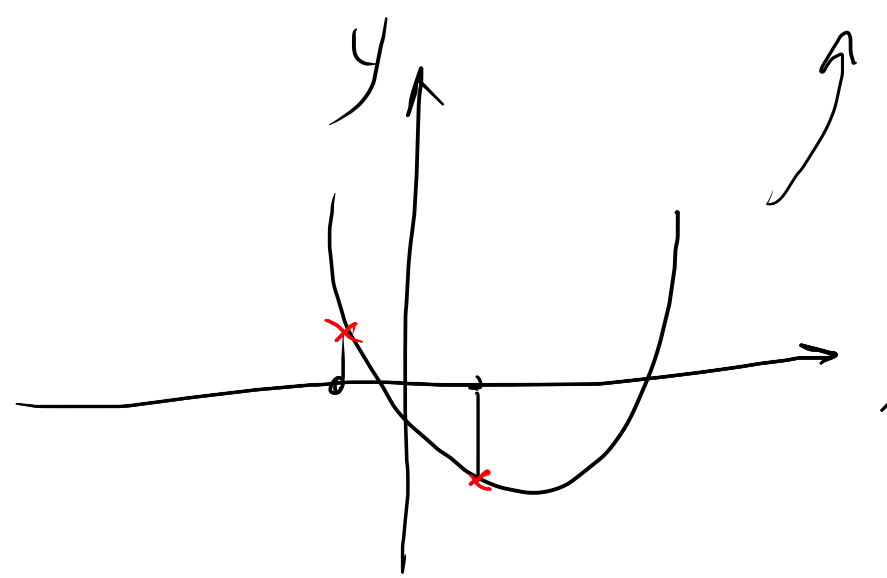


NON è una FUNZIONE

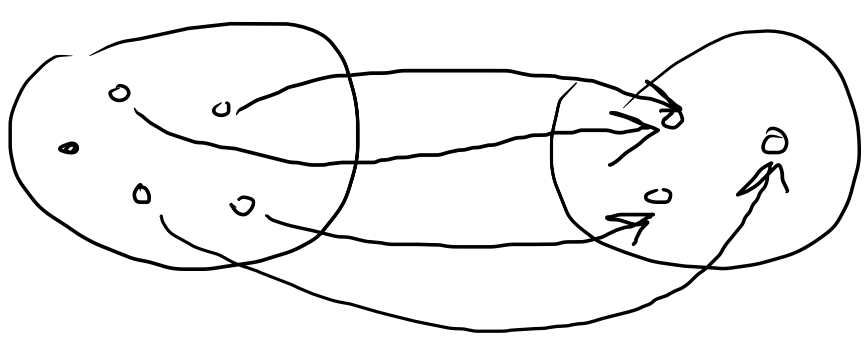




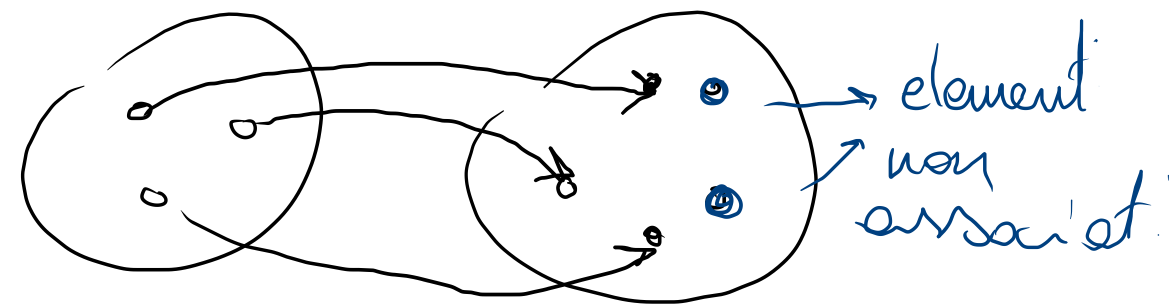
è una FUNZIONE



FUNZIONE SURIETTIVA: ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio

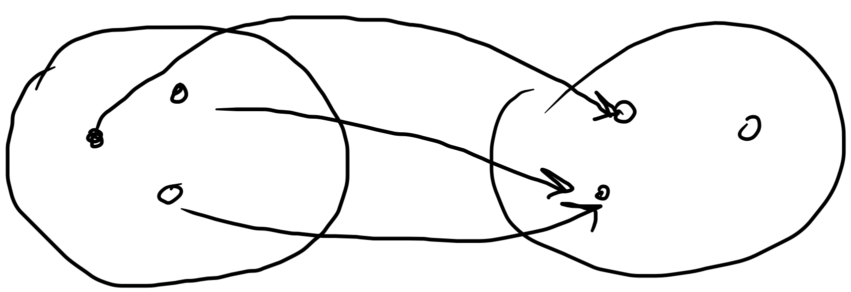


è SURIETTIVA

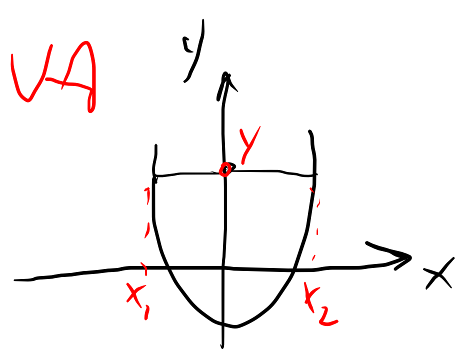


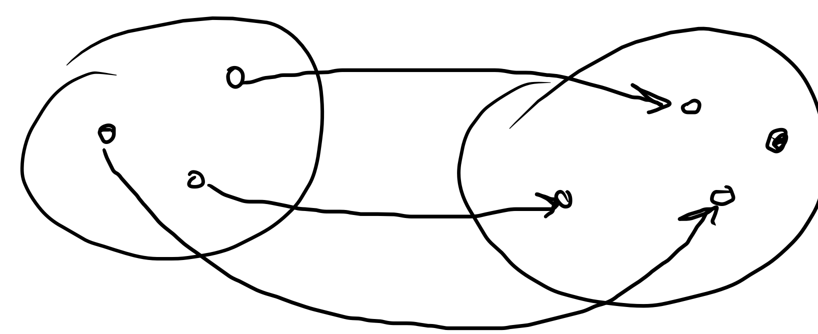
non è SURIETTIVA

FUNZIONE INIETTIVA: associa a elementi distinti del dominio, elementi distinti del codominio

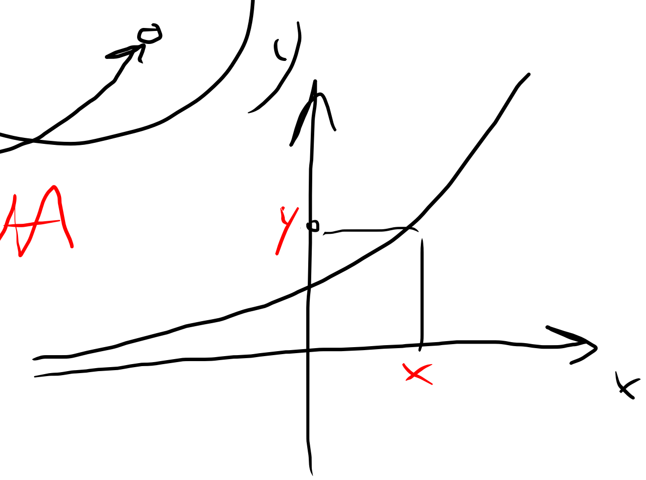


non è INIETTIVA





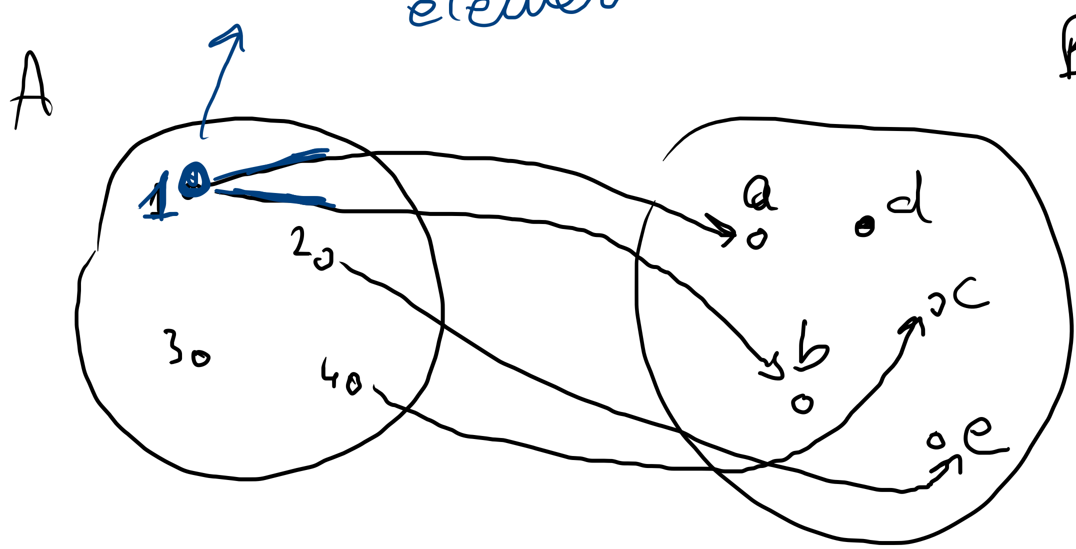
è INIETTIVA



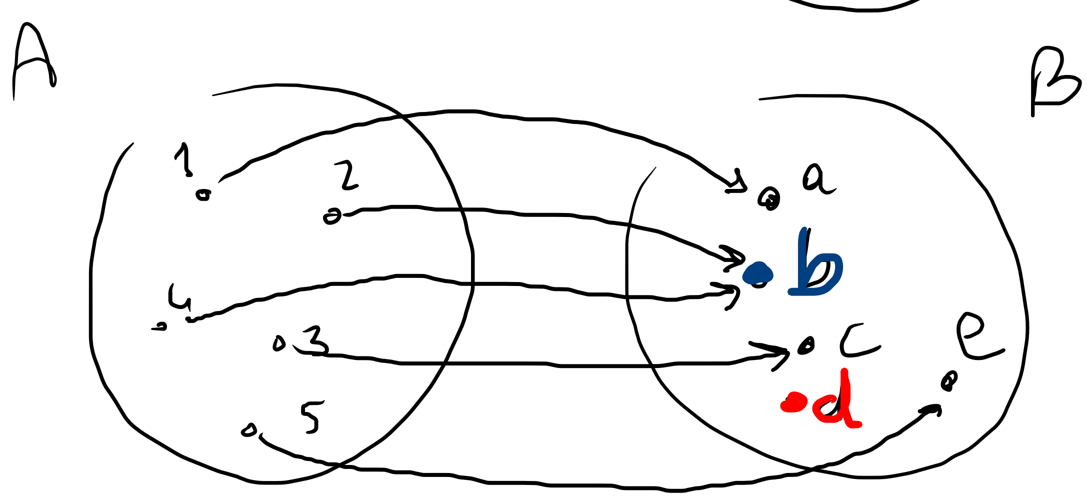
FUNZIONE BIETTIVA / BIUNIVOCA : sia iniettiva che suriettiva

↳ Sono invertibili

all'1 sono associati due elementi



NON è una funzione



è una funzione

né INIETTIVA

né SURIETTIVA

PRINCIPIO di INDUZIONE

$b_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ è multiplo di 3 $\forall n \in \mathbb{N}$?

1) Base dell'induzione: provo l'enunciato per un valore

$n = 0$ $\qquad b_0 = 0 + 0 + 0 = 0$

b_0 è multiplo di 3? Sì

Base dell'induzione verificata

2) Passo/Ipotesi induttiva: supposto l'enunciato valido per n, provo che è valido anche per $n+1$

b_n VERO (ipotesi)

che succede a b_{n+1}?

$$b_{n+1} = (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n^2 + 6n + 3 + 5n + 5 =$$

$$= n^3 + 6n^2 + 14n + 9 =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 5n + 9n + 9 =$$

$$= \underbrace{n^3 + 3n^2 + 5n} + 3n^2 + 9n + 9 =$$

$$= b_n + \underbrace{3(n^2 + 3n + 3)}_{\text{è multiplo di 3}}$$

Per ipotesi è multiplo di 3

Quindi b_{n+1} è multiplo di 3.

Per il principio di induzione b_n è VERA $\forall n \in \mathbb{N}$

Provo che $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

1) Base dell' induzione $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1$$

$$(1+1)! - 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$$

✓ verificato per $n=1$

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \rightarrow 1! = 1 \cdot \underbrace{0!}$$

$$1! = 1 \qquad 0! = 1$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{3} k \cdot k! =$$

$$= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3!$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

2) Passo dell'induzione

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1}$$ Vero per ipotesi

Provo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! = (n+2)! - 1 \implies$$ Devo provare questa

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!}_{\text{per ipotesi}} + (n+1)(n+1)! =$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)!\,(n+1+1) - 1 = (n+1)!\,(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

Ho provato il passo dell'induzione

Per il p. di induzione

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$ è vero

per $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$$

Provo per $n = 1$

$$\sum_{K=1}^{1} K = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$$ VERIFICATO

Suppongo vero per n

$$\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$$

Devo dimostrare pe $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}\ \text{per ipotesi}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Quindi $\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$ è vero $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

per il p. di induzione

$$\sum_{k=0}^{n} 4^{-k} = \frac{4}{3}\left(1-4^{-(n+1)}\right)$$

Provare con il p. di induzione

$$x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

in generale $x^{-K}=\frac{1}{x^K}$

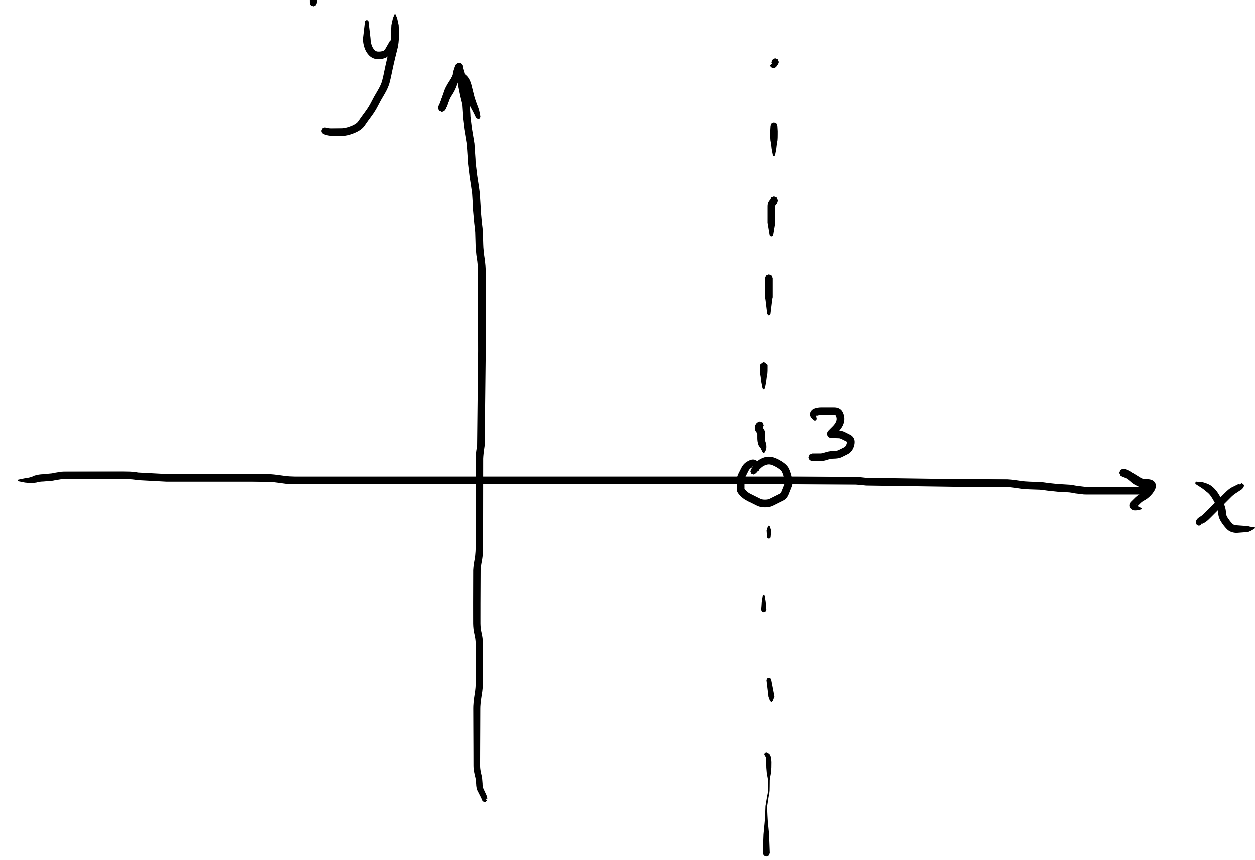
$$\cancel{x^{-2}=-x^{2}}$$

DOMINIO: insieme su cui è definita la funzione

$$f(x) = \frac{5}{x-3}$$

La funzione è definita per ogni numero tranne il 3

$$D = \{ \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 3 \}$$



$$f(x) = \frac{5x}{x^2 - 9}$$

$x^2 - 9 \neq 0 \to x^2 = 9 \to x \neq \pm 3$ $\quad D = \{\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 3\}$