LOGICA

Lezione 7: Correttezza e Completezza

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della lezione

- Corretezza
- Completezza
- Ricerca di Contromodelli

Sintassi e semantica

Sintassi (calcolo)	Semantica
$\Gamma \vdash P$ derivabilità	$\Gamma \vDash P$ cons. semantica
$\vdash P$ teorema	$\vDash$P tautologia
$\Gamma \vdash \perp$ inconsistenza	$\Gamma \vDash \perp$ insoddisfacibilità
$\Gamma \nvdash \perp$ consistenza	$\Gamma \nvDash \perp$ soddisfacibilità

Correttezza (Soundness) $\Longrightarrow$

Completezza (Completeness) $\Longleftarrow$

Notazione

- Una fbf P è **conseguenza semantica** di un insieme Γ di fbf e si scrive $\Gamma \vDash P$, se ogni modello di Γ è un modello per P.

- Siano Γ e Δ degli insiemi di fbf, Δ **è soddisfatto** in Γ ($\Gamma \vDash \Delta$) sse
  - per ogni v se $v(P) = 1$ per ogni P in Γ
  - allora esiste un Q in Δ t.c. $v(Q) = 1$

Correttezza e completezza

- **Teorema di correttezza**:
  - Se $\Gamma \vdash \Delta$ allora $\Gamma \vDash \Delta$
    (se Δ è derivabile da Γ allora Δ è soddisfatto in Γ)

- **Teorema di completezza**:
  - Se $\Gamma \vDash \Delta$ allora $\Gamma \vdash \Delta$
    (se Δ è soddisfatto in Γ allora Δ è derivabile da Γ)

Dim Teorema di Correttezza

Essendo vera $\Gamma \vdash \Delta$ dobbiamo dimostrare che $\Gamma \vDash \Delta$, cioè che:

- se $v(P) = 1$ per ogni $P \in \Gamma$ allora $\exists$ almeno un Q in Δ t.c. $v(Q) = 1$.

- Per induzione strutturale (sulle regole):
  - si ipotizza che proprietà sia vera sulle premesse della regola
  - si dimostra che è vera anche sulla conclusione

- **Casobase**: $A \vdash A$, la tesi è ovvia poiché $A \vDash A$ è sempre vera

Dim Teorema di Correttezza

- **Caso induttivo: negazione** $(\neg - l)$
- Regola $(\neg - l)$: $\frac{\Gamma \vdash \mathrm{P}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathrm{P} \vdash \Delta}$
  - Ipotesi induttiva: per $\Gamma \vdash P, \Delta$ vale il th.
  - Tesi: vale anche per $\Gamma, \neg \mathrm{P} \vdash \Delta$
  - Sia v t.c. rende vere tutte le prop. di $\Gamma, \neg \mathrm{P}$ quindi $v(P) = 0$. Per l'ipotesi induttiva ($\Gamma \vDash \mathrm{P}, \Delta$) allora deve esistere almeno un Q in Δ tale che $v(Q) = 1$

Dim Teorema di Correttezza

- **Caso induttivo: negazione** $(\neg - r)$
- Regola $(\neg - r)$: $\frac{\Gamma, \mathrm{P} \vdash \Delta}{\Gamma, \vdash \neg P, \Delta}$
  - Ipotesi induttiva: per $\Gamma, \mathrm{P} \vdash \Delta$ vale il th.
  - Tesi: vale anche per $\Gamma \vdash \neg P, \Delta$
  - Sia v t.c. rende vere tutte le prop. di Γ:
    - Caso 1: $v(\neg P) \ = 1$ ovvio v rende vera almeno una proposizione in $\neg P, \Delta$
    - Caso 2: $v(\neg P) = 0 \ \ i.\mathrm{e}.\, v(P) = 1$. Per l'ipotesi induttiva v rende vera almeno una proposizione in Δ

Dim Teorema di Correttezza

- **Caso induttivo: congiunzione** $(\wedge - l)$
- Regola $(\neg - r)$: $\dfrac{\Gamma, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \vdash \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash \Delta}$
  - Ipotesi induttiva: per $\Gamma, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \vdash \Delta$ vale il th.
  - Tesi: vale anche per $\Gamma, \mathrm{P} \wedge Q \vdash \Delta$
  - Sia v t.c. rende vere tutte le prop. di $\Gamma, \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$:
    - $v(P \wedge Q) = 1$ iff $v(P) = 1$ e $v(Q) = 1$ e quindi rende vere le prop. di $\Gamma, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ e, per ipotesi induttiva, rende vera almeno una proposizione in Δ.

Dim Teorema di Corretezza

- **Caso induttivo: congiunzione** $(\wedge - r)$
- Regola $(\neg - r)$: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathrm{P}, \Delta \qquad \Gamma \vdash \mathrm{Q}, \Delta}{\Gamma \vdash P \wedge Q, \Delta}$
  - Ipotesi induttiva: per $\Gamma \vdash P, \Delta$ e $\Gamma \vdash Q, \Delta$ vale il th.
  - Tesi: vale anche per $\Gamma \vdash P \wedge Q, \Delta$
  - Sia v t.c. rende vere tutte le prop. di Γ:
    - Caso 1: $v(P \wedge Q) = 1,$ allora la tesi è vera
    - Caso 2: $v(P \wedge Q) = 0$ allora $v(P) = 0$ oppure $v(Q) = 0$ ma quindi per ipotesi induttive ($\Gamma \vdash P, \Delta$ e $\Gamma \vdash Q, \Delta$) v rende vera almeno una proposizione in Δ.

Teorema di Completezza Finita

- **Teorema di completezza finita**:
  - Sia Γ un insieme finito di fbf se $\Gamma \vDash \Delta$ allora $\Gamma \vdash \Delta$
- **Dimostrazione:**
  - Supponiamo che $\Gamma \vDash \Delta$
  - Costruiamo una dimostrazione con il calcolo dei sequenti per $\Gamma \vdash \Delta$:
  - Poiché ogni premessa contiene meno connettivi della conclusion: il calcolo termina
  - Quindi con un numero finito di passi arriviamo a delle foglie del tipo:
    - $\Gamma' \vdash \Delta'$
    - contenenti solo var. atomiche.

Dim Teorema di Completezza Finita

- **Dimostrazione:**
  - Le regole preservano la validità.
  - Dato che per ipotesi $\Gamma \vDash \Delta$ allora tutte le foglie devono essere valide
    - Γ', Δ' sono insiemi di formule atomiche
    - un sequente composto di formule atomiche per essere valido deve contenere una formula atomica A sia in Γ', Δ'
    - quindi con la regola di indebolimento otteniamo un assioma $A \vdash A$
    - il seguente è dimostrato.

Teorema di Completezza Forte

- **Teorema di completezza forte**:
  - Sia $\Gamma \vDash \Delta$ allora $\Gamma \vdash \Delta$
- **Dimostrazione:**
  - Per il secondo Corollario al Teorema di compattezza (Thm 1.20): se $\Gamma \vDash \Delta$ allora esiste un sottoinsieme finito Γ' di Γ t.c. $\Gamma' \vDash \Delta$.
  - Per il teorema di completezza finito: se $\Gamma' \vDash \Delta$ allora $\Gamma' \vdash \Delta$.
  - Poiché Γ' è un sottoinsieme di Γ: se $\Gamma' \vdash \Delta$ a maggior ragione $\Gamma \vdash \Delta$.

Ricerca di Contromodelli

- Con il calcolo dei sequenti possiamo anche dimostrare che una conseguenza semantica è falsa.

- Per dimostrare che $\Gamma \vDash \Delta$ è falso basta dimostrare che esiste un modello di Γ che non sia modello per nessuna proposizione in Δ.

- Tale interpretazione è detta **contromodello** di $\Gamma \vDash \Delta$

Ricerca di Contromodelli

- Se $\Gamma \vDash \Delta$ è falso, possiamo utilizzare il calcolo dei sequenti per costruire un contromodello:
  - sia $A_1, A_2, \dots A_n \vdash B_1, B_2 \dots, B_m$ il sequente che non può essere ulteriormente trasformato in un assioma ($A_i \neq B_j \ \forall i, j$)
  - per rendere falso il sequente basta prendere un'interpretazione che:
    - assegna il valore vero a tutte le lettere A_i
    - assegna il valore falso a tutte le lettere B_i

Esempio

- Dimostrare che $(A \lor B) \vDash (B \land A)$ è falso

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash B \quad B \vdash B}{(A \lor B) \vdash B} \qquad \dfrac{B \vdash A \quad A \vdash A}{(A \lor B) \vdash A}}{(A \lor B) \vdash (B \land A)}$$

- Per dimostrare che (A ∨ B) (B ∧ A) è falso basta costruire un contromodello.
- E.g. lo costruisco da $A \vdash B$.

Esempio

- Dimostrare che $(A \vee B) \vDash (B \wedge A)$ è falso

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash B \quad B \vdash B}{(A \vee B) \vdash B} \qquad \dfrac{B \vdash A \quad A \vdash A}{(A \vee B) \vdash A}}{(A \vee B) \vdash (B \wedge A)}$$

- E.g. $v(A) = 1, v(B) = 0$
- Verifico:
  - $v(A \vee B) = 1$, v è modello per $A \vee B$
  - $v(B \wedge A) = 0$, v non è modello per $A \wedge B$