Rivestimenti

Def Un'applicazione continua $f: X \to Y$ è un <u>omeomorfismo locale</u> se $\forall x \in X$ $\exists$ $U \subset X$ intorno aperto di x t.c. $f(X) \subset Y$ è aperto e $f_{|U} : U \xrightarrow{\cong} f(U)$ è un omeomorfismo.

Def Un'applicazione continua $p: X \to Y$ è un <u>rivestimento</u> se esiste uno spazio discreto I e $\forall y \in Y$ $\exists$ $U \subset Y$ intorno aperto di y t.c.

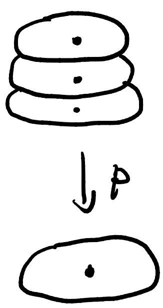
$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ con $V_i \subset X$ aperto $\forall i \in I$ e

$p_i \overset{def}{=} p_{|V_i} : V_i \xrightarrow{\cong} U_i$ è un omeomorfismo $\forall i \in I$.

Un tale aperto $U \subset Y$ è detto <u>aperto ben rivestito</u> o anche <u>aperto banalizzante</u>.

Oss 1) rivestimento $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ omeo locale suriettivo

2) $\exists$ $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times I$ omeo t.c.



$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_{|U}"'] & U \times I \arrow[d, "\pi_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

commuta

$p_{|U} = \pi_U \circ \varphi$

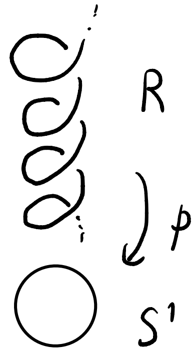
π_U proiezione

$\varphi(x) := (p(x), i)$ se $x \in V_i \subset p^{-1}(U)$.

3) $p^{-1}(y) \cong I$ $\forall y \in Y$ è discreto.

Es $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t} \cong (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

rivestimento, $I = \mathbb{Z}$



$u_0 \in S^1 \rightsquigarrow U = S^1 - \{-u_0\}$

$\Rightarrow u_0 \in U$ Una almeno tra $\cos$, $\sin$ è localmente invertibile con inversa loc. $\arccos$, $\arcsin$

$t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $p(t_0) = u_0$

p periodica di periodo 1

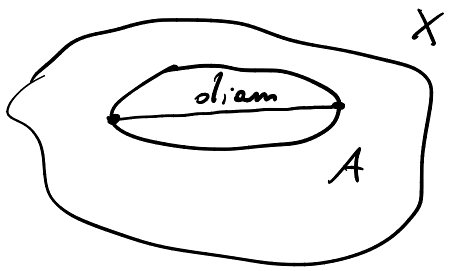
$$p^{-1}(U) = \left]t_0 - \tfrac{1}{2}, t_0 + \tfrac{1}{2}\right[+ \mathbb{Z} \cong \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]t_0 - \tfrac{1}{2}, t_0 + \tfrac{1}{2}\right[$$

$$p| : \left]t_0 - \tfrac{1}{2} + k, t_0 + \tfrac{1}{2} + k\right[\xrightarrow{\cong} U \quad \Rightarrow p \text{ rivestimento}$$

Def (X, d) spazio metrico, $A \subset X$ non vuoto $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{diam} A \overset{\text{def}}{=} \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}$$

diametro di A



Lemma di Lebesgue Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $A \subset X$ soddisfa $\operatorname{diam} A \leq \delta \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}$ t.c. $A \subset U$ (un tale $\delta > 0$ è detto numero di Lebesgue di $\mathcal{U}$).

Dim $\{U_1, \dots, U_n\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$

Supponiamo $X \neq U_i$ $\forall\, i = 1, \dots, n$ (altrimenti ovvio).

$C_i = X - U_i \neq \emptyset$ chiuso in $X \Rightarrow$ compatto

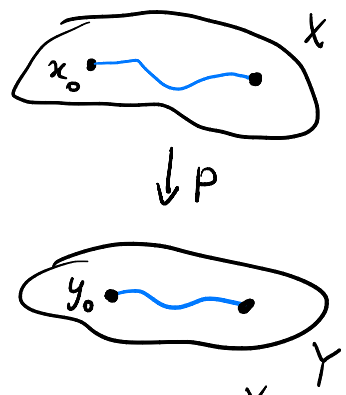
$$\varphi : X \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$$

X compatto $\Rightarrow \exists\, \delta = \min \varphi$. Allora $\delta > 0$ è un numero di Lebesgue per $\mathcal{U}$. $\boxed{E}$

Teoremi di sollevamento

Teorema di sollevamento dei cammini

Sia $p : X \to Y$ un rivestimento e sia $\gamma : [0,1] \to Y$ un cammino con $\gamma(0) = y_0$. Per ogni $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ esiste un unico cammino $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ t.c. $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. ($\tilde{\gamma}$ è un sollevamento di γ).



Dim Esistenza

$\mathcal{B} = \{ B \subset Y \mid B$ aperto banalizzante $p \}$

$\{ \gamma^{-1}(B) \}_{B \in \mathcal{B}}$ ricoprimento aperto di $[0,1]$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & Y \end{tikzcd}$$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ suddivisione di $[0,1]$

t.c. $[t_{i-1}, t_i] \subset \gamma^{-1}(B_i)$, $B_i \in \mathcal{B}$

$(t_i - t_{i-1} \leq \delta)$. Facciamo vedere che $\forall\, k = 1, \dots, n$:

γ sollevabile in $[0, t_{k-1}] \Rightarrow \gamma$ sollevabile in $[0, t_k]$

(con $\tilde{\gamma}(0) = x_0$). $\tilde{\gamma}_{k-1} : [0, t_{k-1}] \to X$ sollevamento di γ

$\tilde{\gamma}_{k-1}(0) = x_0$. $B \in \mathcal{B}$ t.c. $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset B$, $V_k \subset p^{-1}(B)$

aperto t.c. $p_k := p|_{V_k} : V_k \xrightarrow{\cong} B$ omeo t.c. $\tilde{\gamma}_{k-1}(t_{k-1}) \in V_k \rightsquigarrow \tilde{\gamma}_k : [0, t_k] \to X$

$$\tilde{\gamma}_k(t) \overset{def}{=} \begin{cases} \tilde{\gamma}_{k-1}(t), & t \in [0, t_{k-1}] \\ (p_k^{-1} \circ \gamma)(t), & t \in [t_{k-1}, t_k] \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{\gamma}_{k-1}(t_{k-1}) = (p_k^{-1} \circ \gamma)(t_{k-1}) \Rightarrow \tilde{\gamma}_k$ continua

$\tilde{\gamma}_k(0) = x_0$, $p \circ \tilde{\gamma}_k = \gamma|_{[0, t_k]}$.

$\rightsquigarrow \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_n : [0,1] \to X$ sollevamento di γ, $\tilde{\gamma}(0) = x_0$.

<u>Unicità</u> $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0,1] \to X$ sollevamenti di γ, $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = x_0$

Mostriamo che $\forall k = 1, \dots, n$:

$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ in $[0, t_{k-1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ in $[0, t_k]$.

$\tilde{\gamma}_1(t_{k-1}) = \tilde{\gamma}_2(t_{k-1}) \in V_k \subset p^{-1}(U)$ (V_k come sopra)

$\tilde{\gamma}_1([t_{k-1}, t_k])$ e $\tilde{\gamma}_2([t_{k-1}, t_k]) \subset V_k$

perché sono connessi (p.a.) $\Rightarrow \gamma = p \circ \tilde{\gamma}_1 = p \circ \tilde{\gamma}_2$ su $[t_{k-1}, t_k]$

si scrive: $\gamma = p_k \circ \tilde{\gamma}_1 = p_k \circ \tilde{\gamma}_2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ su $[t_{k-1}, t_k] \Rightarrow$

$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ su $[0, t_k]$. Quindi $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ su $[0, 1]$ ($k = n$).

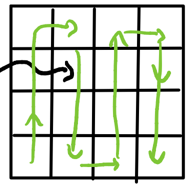
Teorema di sollevamento delle omotopie

Sia $p : X \to Y$ un rivestimento e sia $H : [0,1] \times [0,1] \to Y$ un'omotopia con $y_0 = H(0,0)$. Per ogni $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ esiste un'unica omotopia $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to X$ t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$ e $H = p \circ \tilde{H}$ ($\tilde{H}$ è un sollevamento di H). Inoltre se H è rel $\{0,1\}$ allora anche $\tilde{H}$ è rel $\{0,1\}$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]\times[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dim Esistenza $\{H^{-1}(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ ricoprimento aperto di $[0,1]\times[0,1]$ $\rightsquigarrow$

$Q_{ij} = Q_k$



δ = numero di Lebesgue $\rightsquigarrow$ $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$, $t_i - t_{i-1} \leq \frac{\delta}{2}$

$Q_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j] \subset [0,1]\times[0,1]$, $i,j = 1,\dots,n$

ordiniamo i Q_{ij} con l'ordine lessicografico:

$(i,j) < (i',j') \iff i<i'$ oppure $i=i'$ e $j<j'$

In questo modo li numeriamo $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n^2}$, in base all'ordine.

$H(Q_i) \subset B_i \in \mathcal{B}$ per un certo $B_i \in \mathcal{B}$ (diam $Q_i \leq \delta$)

Dimostriamo che: $\tilde H$ definita su $\bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i \Rightarrow \tilde H$ si estende a $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i$

Questo basta per concludere perché $\tilde H$ già definita su $(0,0)$ $(\tilde H(0,0) = x_0)$ e si estende su $\bigcup_{i=1}^{n^2} Q_i = [0,1]\times[0,1]$

$A_k = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$, $k\geq 1$ e $A_0 = \{(0,0)\}$:

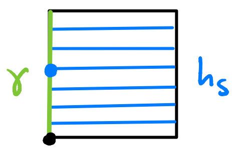
$$A_{k-1}\cap Q_k = \begin{cases} \{(0,0)\} & (\text{per } k=1) \\ 1 \text{ lato} \\ 2 \text{ lati adiacenti}\end{cases}$$ è sempre connesso (p.a.)

$\tilde H_{k-1}$ sollevamento di H su A_k, $\tilde H_{k-1}(0,0) = x_0$

$\tilde H_{k-1}(A_{k-1}\cap Q_k) \subset V_k \subset p^{-1}(B_k)$, V_k aperto in X t.c.

$p_k := V_k \xrightarrow{\cong} B_k$ omeo $\rightsquigarrow$ $\tilde H_k : A_k \to X$, $\tilde H_k = \begin{cases} \tilde H_{k-1} & \text{su } A_{k-1} \\ p_k^{-1}\circ H & \text{su } Q_k.\end{cases}$

Unicità



$\tilde\gamma_0 : [0,1] \to X$ unico sollevamento di

$\gamma_0 : [0,1] \to Y$ $\gamma(s) = H(0,s)$ t.c. $\tilde\gamma_0(0) = x_0$

$\forall s \in [0,1] \rightsquigarrow \tilde h_s : [0,1] \to X$ sollevamento di $h_s : [0,1] \to Y$

t.c. $\tilde h_s(0) = \tilde\gamma_0(s)$ $\rightsquigarrow$ Se un sollevamento continuo di H esiste si deve avere necessariamente $\tilde H(t,s) = \tilde h_s(t)$.

Teorema $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

__Dim__ $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$, $* = (1,0) \in S^1$

$\varphi: \pi_1(S^1, *) \to \mathbb{Z}$, $\varphi([\omega]) \stackrel{def}{=} \tilde{\omega}(1) \in \mathbb{Z}$

dove $\tilde{\omega}$ è il sollevamento di ω t.c. $\tilde{\omega}(0) = 0$

(ben definita per i teoremi di sollevamento e $p^{-1}(*) = \mathbb{Z}$).

$\psi: \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$, $\psi(n) = [p \circ \lambda_n]$, $\lambda_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\lambda_n(t) = nt$.

$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ (ovvio perché λ_n è sollevamento di $p \circ \lambda_n$)

Mostriamo che $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1, *)}$

$[\omega] \in \pi_1(S^1, *) \rightsquigarrow \varphi([\omega]) = \tilde{\omega}(1) \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\omega}(0) = 0$

$\tilde{H}: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $\tilde{H}(t,s) = (1-s)\tilde{\omega}(t) + s\lambda_{\tilde{\omega}(1)}(t)$

omotopia rel $\{0,1\}$ $\rightsquigarrow$ $H := p \circ \tilde{H}$ omotopia rel $\{0,1\}$

tra ω e $p \circ \lambda_{\tilde{\omega}(1)}$ $\Rightarrow$ $[\omega] = \psi([\lambda_{\tilde{\omega}(1)}]) = \psi(\varphi([\omega]))$.

Quindi $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1, *)}$.

Resta da far vedere che ψ è un omomorfismo

(quindi un isomorfismo).

$\lambda_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\lambda_{a,b}(t) = a + bt$

$\lambda_{m+n} \simeq_{\{0,1\}} \underbrace{\lambda_m \cdot \lambda_{m,n}}_{\text{concatenazione}}$ (omotopia combinazione convessa)

$\psi(m+n) = [p \circ \lambda_m][p \circ \lambda_{m,n}] = \psi(m)\,\psi(n)$

perché $p \circ \lambda_{m,n} = p \circ \lambda_n$ dato che p è periodica.

Teorema Siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ punti base. Allora

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Dim $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ proiezioni canoniche

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$\varphi([\omega]) = (p_{1*}([\omega]), p_{2*}([\omega])) \quad \text{omomorfismo.}$$

$$\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) \ni \omega : [0,1] \longrightarrow X \times Y \rightsquigarrow \omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$$

$$\omega_1 \in \Omega(X, x_0), \quad \omega_2 \in \Omega(Y, y_0) \qquad \Downarrow$$

$$\varphi([\omega]) = ([\omega_1], [\omega_2]). \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2)$$

$$\psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

$$\psi([\omega_1], [\omega_2]) = [(\omega_1, \omega_2)] \quad \text{ben definita}$$

$$\varphi \circ \psi = id, \quad \psi \circ \varphi = id \quad \boxed{E}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ e } \psi = \varphi^{-1} \text{ isomorfismi.}$$

Corollario $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.